

KHOA TOÁN CƠ · TIN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN · ĐHQG HÀ NỘI

Một số
phương pháp chọn lọc
**GIẢI CÁC BÀI TOÁN
SƠ CẤP**

GIÚP LUYỆN THI ĐẠI HỌC
VÀ BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI TOÁN

TẬP

3



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHAN ĐỨC CHÍNH - PHẠM VĂN ĐIỀU - ĐỖ VĂN HÀ
PHAN VĂN HẠP - PHẠM VĂN HÙNG - PHẠM ĐĂNG LONG
NGUYỄN VĂN MẬU - ĐỖ THANH SƠN - LÊ ĐÌNH THỊNH

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN LỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN SƠ CẤP

Tài liệu dùng cho học sinh chuẩn bị thi vào các trường đại học và bồi dưỡng học sinh giỏi toán

TẬP III

(In lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI - 2001

PHẦN THỨ NHẤT

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

MỞ ĐẦU

1^o) *Phương trình và bất phương trình tương đương*

Xét 2 phương trình :

$$f_1(x) = g_1(x) \quad (1)$$

$$f_2(x) = g_2(x) \quad (2)$$

và 2 bất phương trình :

$$f_1(x) > g_1(x) \quad (1')$$

$$f_2(x) > g_2(x) \quad (2')$$

Nếu mọi nghiệm số của (1) đều là nghiệm của (2) ta nói rằng (2) là phương trình hệ quả của (1) và viết $(1) \Rightarrow (2)$.

Hai phương trình (bất phương trình) là tương đương với nhau nếu phương trình (bpt) này là hệ quả của pt (bpt) kia và ngược lại, tức là nghiệm của pt (bpt) này cũng là nghiệm của pt (bpt) kia và ngược lại.

Ta viết $(1) \Leftrightarrow (2) ((1') \Leftrightarrow (2'))$.

Khái niệm tương đương của pt và bpt là tương đối, nó phụ thuộc vào việc xét pt (bpt) trong tập hợp nào. Theo định nghĩa tất cả các phương trình vô nghiệm (trong một tập nào đó) đều tương đương với nhau, chẳng hạn trong tập hợp các số thực các pt $\sin x + 2 = 0$ và $x^4 + 1 = 0$ tương đương với nhau.

Trong tập các số nguyên các pt

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (1), \quad 5x^2 + x - 6 = 0 \quad (2)$$

tương đương với nhau vì chúng có 1 nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhưng trong tập hợp các số thực, hai phương trình trên không tương đương vì

$$\text{pt (1) có nghiệm } x = \frac{1}{2} \text{ và } x = 1,$$

$$\text{pt (2) có nghiệm } x = -\frac{6}{5} \text{ và } x = 1.$$

Phép biến đổi đưa một pt (bpt) về một pt (bpt) mới tương đương với pt (bpt) đã cho gọi là phép biến đổi tương đương.

Trong quá trình giải pt và bpt nếu chỉ dùng các phép biến đổi tương đương thì không cần thiết thử lại nghiệm tìm được. Tuy nhiên có những trường hợp ta phải dùng các phép biến đổi không tương đương thì nhất thiết phải thử lại nghiệm tìm được, để loại các nghiệm ngoại lai (nếu có) cũng như tìm đủ những nghiệm bị mất trong quá trình biến đổi.

2^o) *Khái niệm về hệ và tuyến các phương trình và bất phương trình một ẩn số.*

Cho n phương trình

$$f_1(x) = 0,$$

$$f_2(x) = 0,$$

.....

$$f_n(x) = 0,$$

với miền xác định và tập hợp nghiệm tương ứng là

$$S_1, S_2, \dots, S_n;$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n.$$

Nếu $x = x_0$ là nghiệm chung của tất cả n phương trình trên, ta nói rằng x_0 là nghiệm của hệ

$$(1) \quad \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

Gọi S và A là miền xác định và tập hợp nghiệm của hệ (1) thì :

$$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n,$$

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n.$$

Nếu $x = x^*$ là nghiệm của ít nhất một trong số n pt đã cho, ta nói rằng x^* là nghiệm của tuyển n phương trình trên và ký hiệu :

$$(2) \quad \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

Miền xác định của tuyển các pt (2) là :

$S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$ và tập hợp nghiệm của nó là

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

Tương tự định nghĩa hệ và tuyển các bất phương trình.

Tổng quát hơn người ta xét tập hợp gồm cả hệ và tuyển chẳng hạn :

$$\left[\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ f_3(x) = 0. \end{cases} ; \begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ f_3(x) = 0. \end{cases} \right]$$

Ví dụ. a) Phương trình tích $f_1(x).f_2(x) \dots f_n(x) = 0$ tương đương với tuyển :

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \dots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

$$b) \quad x^2 + 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x \leq -3. \end{cases}$$

$$c) \quad |x^2 - 3x + 2| < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 5, \\ x^2 - 3x + 2 > -5. \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} |x + 1| < 2, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 1 < 2, \\ x + 1 > -2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x > -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

3^o) Bất phương trình mà vế trái là tích hay thương của các nhị thức bậc nhất.

Xét bất phương trình dạng :

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) < 0, \quad (1)$$

$$\frac{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)}{(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_p)} \geq 0 \quad (2)$$

Ta nhận thấy bpt (2) tương đương với bpt

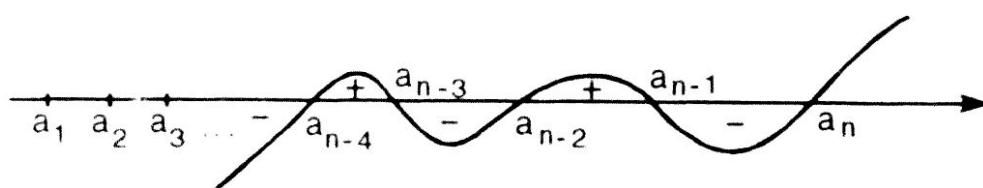
$$(x - b_1) \dots (x - b_n)(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_p) \geq 0 \quad (3)$$

với điều kiện $x \neq c_1, x \neq c_2, \dots, x \neq c_p$.

Để giải bpt (1) hoặc (2) ta có thể dùng phương pháp lập bảng nhưng nếu bpt có nhiều thừa số thì rất công kênh dễ nhầm lẫn nên ở đây ta sẽ giải bằng phương pháp chia khoảng : Giả sử các số a_i được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$$

và ta chia trục số thành $n + 1$ khoảng với các điểm chia là $a_1, a_2, \dots, a_n$. Khi đó dấu của vế trái của (1) được biểu diễn như sau :



Hình 1

Do đó ta dễ dàng chọn các khoảng thích hợp thỏa mãn bpt đã cho.

Ví dụ.

a) Giải $(x - 1)^3(x - 2)^5(x + 3)^{101}(x^2 - 6x + 5)^3 > 0$. (*)

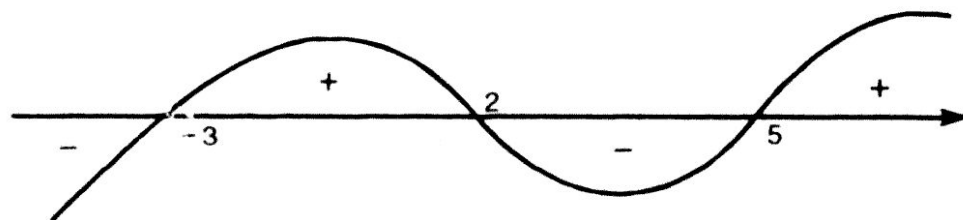
Ta nhận thấy bpt (*) tương đương với bpt

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x - 1)(x - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2(x - 2)(x + 3)(x - 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 2)(x - 5) > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Ta biểu diễn trên trục số :



Hình 2

Do đó nghiệm của (*) là

$$-3 < x < 2, x > 5, x \neq 1$$

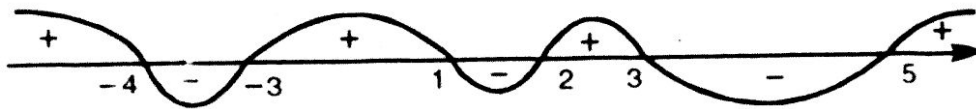
hay $-3 < x < 1, 1 < x < 2, x > 5$.

2) Giải bpt

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(x+4)(x+3)(x-4)^2} \leq 0 \quad (**)$$

Bpt (**) tương đương với

$$\begin{cases} (x+4)(x+3)(x-1)(x-2)(x-3)(x-5) \leq 0 \\ x \neq 4, x \neq -4, x \neq -3 \end{cases}$$



Hình 3

Do đó (**) có nghiệm là các khoảng

$$\begin{cases} -4 < x < -3, \\ 1 \leq x \leq 2, \\ 3 \leq x \leq 5, \quad x \neq 4. \end{cases}$$

CHƯƠNG 1

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Phương trình, bất phương trình bậc nhất một ẩn

Ví dụ. (Dự trữ B-1973). Giải và biện luận phương trình

$$a^2x = a(x+b) - b.$$

Giải : Ta viết lại phương trình dưới dạng :

$$a(a - 1)x = b(a - 1).$$

Do đó, nếu $a = 0$, $b \neq 0$ thì phương trình không có nghiệm.

Nếu $a = 1$ hoặc $a = b = 0$ thì phương trình sẽ nhận mọi giá trị của x làm nghiệm.

Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{b}{a}.$$

Ví dụ 2. Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{a}{ax - 1} + \frac{b}{bx - 1} = \frac{a + b}{(a + b)x - 1}.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa

$$ax \neq 1 ; bx \neq 1 ; (a + b)x \neq 1. \quad (1)$$

1) Nếu $a = 0$ và $b = 0$, thì mọi x là nghiệm của phương trình ; còn nếu chỉ $a = 0$ (hoặc chỉ $b = 0$) thì mọi

$$x \neq \frac{1}{b} \text{ (hoặc } x \neq \frac{1}{a} \text{) là nghiệm.}$$

2) Nếu $a \neq 0$ và $a + b = 0$, hay $b = -a \neq 0$, thì phương trình có dạng :

$$\frac{a}{ax - 1} + \frac{-a}{-ax - 1} = 0,$$

hay :
$$\frac{2a^2x}{(ax)^2 - 1} = 0, \text{ ta được nghiệm } x = 0.$$

3) Xét trường hợp $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0$. Khi đó điều kiện (1) trở thành

$$x \neq \frac{1}{a}, x \neq \frac{1}{b}, x = \frac{1}{a+b} \quad (2)$$

Biến đổi vế trái của phương trình đã cho, ta được

$$\frac{2abx - (a+b)}{abx^2 - (a+b)x + 1} = \frac{a+b}{(a+b)x - 1}$$

i) Khi $x \neq 0$, sử dụng tính chất của tỉ lệ thức :

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, ta có thể biến đổi phương trình vừa nhận được về dạng tương đương

$$\frac{2abx}{abx^2} = \frac{a+b}{(a+b)x - 1},$$

hay $\frac{2}{x} = \frac{a+b}{(a+b)x - 1}$. Suy ra $x = \frac{2}{a+b}$, nghiệm này chỉ thỏa mãn (2) khi $a \neq b$.

ii) Xét $x = 0$. Thế vào phương trình đã cho, ta được

$$\frac{a}{-1} + \frac{b}{-1} = \frac{a+b}{-1}. \text{ Điều này luôn luôn đúng.}$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm.

Kết luận :

Nếu chỉ a (hoặc b) bằng 0 thì mọi $x \neq \frac{1}{b}$ (hoặc $\frac{1}{a}$) là nghiệm.

Nếu $a = 0$ và $b = 0$, thì mọi x là nghiệm.

Nếu $a = \pm b \neq 0$ thì nghiệm sẽ là $x = 0$.

Nếu $a \neq 0, b \neq 0, a + b \neq 0, a \neq b$, phương trình có hai nghiệm $x_1 = 0$ và $x_2 = \frac{2}{a+b}$.

Ví dụ 3. Giải và biện luận bất phương trình

$$\frac{ax}{a-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}, \quad a \neq 2.$$

Giải : Ta biến đổi bất phương trình về dạng

$$\frac{a+10}{a-2} x < \frac{5}{2}, \quad (a \neq 2).$$

Nghiệm phụ thuộc vào dấu của $\frac{a+10}{a-2}$, tức là của $(a+10)(a-2)$. Vì vậy :

khi $a = -10$: mọi x là nghiệm ;

khi $-10 < a < 2$: nghiệm là $x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$;

khi $a < -10$ hoặc $a > 2$: nghiệm là $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$.

Ví dụ 4. Hãy xác định tất cả các giá trị của m sao cho các bất phương trình sau đây là tương đương

$$(m-1)x - m + 3 > 0, \quad (1)$$

$$(m+1)x - m + 2 > 0. \quad (2)$$

Giải : 1) Nếu $m = 1$ thì (1) nhận mọi x là nghiệm, trong khi đó (2) sẽ có nghiệm $x > -\frac{1}{2}$. Trường hợp này các bất phương trình (1) và (2) không tương đương.

2) Tương tự, nếu $m = -1$ thì mọi x sẽ là nghiệm của (2) và khi đó nghiệm của (1) là $x < 2$. Vậy (1) và (2) không tương đương.

3) Nếu $m > 1$ thì nghiệm của (1) là $x > \frac{m-3}{m-1}$ và nghiệm của (2) là $x > \frac{m-2}{m+1}$. Khi đó, để (1) và (2) tương đương, ta phải có

$$\frac{m-2}{m+1} = \frac{m-3}{m-1} \quad \text{hay}$$

$$(m-2)(m-1) = (m-3)(m+1)$$

Suy ra $m = 5$. (Giá trị này thỏa mãn điều kiện $m > 1$).

4) Nếu $m < -1$ ta được nghiệm của (1) là $x < \frac{m-3}{m-1}$ và nghiệm của (2) là $x < \frac{m-2}{m+1}$. Do đó, để các bất phương trình (1) và (2) tương đương, ta phải có

$$\frac{m-2}{m+1} = \frac{m-3}{m-1}, \quad \text{hay } m = 5.$$

Nhưng giá trị này không phù hợp vì $5 > -1$.

5) nếu $-1 < m < 1$ thì các khoảng nghiệm của (1) và (2) lần lượt là $x < \frac{m-3}{m-1}$ và $x > \frac{m-2}{m+1}$. Trường hợp này hai khoảng nghiệm không thể trùng nhau, vì vậy (1) và (2) không tương đương.

Tóm lại, để các bất phương trình (1) và (2) tương đương thì phải có $m = 5$.

Chú ý. Có thể giải ví dụ này gọn hơn như sau :

(1) $\Leftrightarrow$ (2) khi và chỉ khi $(m - 1)$ và $(m + 1)$ cùng dấu và

$$\frac{m - 3}{m - 1} = \frac{m - 2}{m + 1}$$

tức là :

$$\begin{cases} (m - 1)(m + 1) > 0 \\ \frac{m - 3}{m - 1} = \frac{m - 2}{m + 1} \end{cases} \Leftrightarrow m = 5.$$

Ví dụ 5. Hãy xác định tất cả các giá trị của m sao cho bất phương trình sau đây nhận mọi x làm nghiệm :

$$(m^2 - 4m + 3)x + m - m^2 < 0.$$

Giải : Viết lại bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$(m - 1)(m - 3)x < m(m - 1).$$

Nếu $m = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm, vì khi đó ta nhận được $0 < 0$. Nếu $m = 3$ thì bất phương trình trở thành $0.x < 0$.

Vậy mọi x là nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ và $m \neq 3$ thì nghiệm của bất phương trình là $x < \frac{m}{m - 3}$ hoặc $x > \frac{m}{m - 3}$ tùy thuộc vào dấu của biểu thức dương hoặc âm. Tóm lại bất phương trình đã cho nhận mọi x làm nghiệm khi và chỉ khi $m = 3$.

§2. Hệ phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất

a) Hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa một ẩn số

Ví dụ 6. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} ax + b = 0, \\ bx + a = 0. \end{cases}$$

Giải : Dễ thấy rằng khi $b^2 - a^2 \neq 0$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm. Thật vậy, nếu hệ có nghiệm $x = x_0$ nào đó, thì

$$\begin{cases} ax_0 + b = 0, \\ bx_0 + a = 0. \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} abx_0 + b^2 = 0, \\ abx_0 + a^2 = 0. \end{cases}$$

Trừ các vế tương ứng của hai đẳng thức này, ta thu được $b^2 - a^2 = 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Do đó, ta chỉ cần xét hai trường hợp $b = \pm a$.

1) Nếu $b = a$ thì hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} ax + a = 0, \\ ax + a = 0; \end{cases} \text{ hay } a(x + 1) = 0 ;$$

i) khi $a = 0$ thì mọi x là nghiệm của hệ phương trình ;

ii) khi $a \neq 0$, hệ có nghiệm $x = -1$.

2) Nếu $b = -a$ thì hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} ax - a = 0, \\ -ax + a = 0; \end{cases} \text{ hay } a(x - 1) = 0 ;$$

i) khi $a = 0$ thì mọi x là nghiệm ;

ii) khi $a \neq 0$ thì hệ có nghiệm $x = 1$.

Tóm lại : Nếu $b \neq \pm a$ thì hệ vô nghiệm.

Nếu $b = a = 0$ thì mọi x là nghiệm của hệ.

Nếu $b = a \neq 0$ thì $x = -1$ là nghiệm.

Nếu $b = -a \neq 0$ thì $x = 1$ là nghiệm.

Ví dụ 7. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 3x + 2 - m \leq 0, & (1) \\ mx + 5m - 1 \leq 0. & (2) \end{cases}$$

Giải : Nghiệm của (1) là $x \leq \frac{m-2}{3}$. (3)

Để giải (2) ta chia ra ba trường hợp :

1) $m = 0$ thì (2) nhận mọi x làm nghiệm vì $-1 \leq 0$ luôn luôn đúng. Trong trường hợp này, hệ đã cho có nghiệm $x \leq -\frac{2}{3}$, và nghiệm là không duy nhất.

2) $m > 0$ thì (2) có nghiệm $x \leq \frac{1-5m}{m}$. Trong trường hợp này, hệ có nghiệm $x \leq \min\left(\frac{m-2}{3}; \frac{1-5m}{m}\right)$.

Trường hợp này, nghiệm không duy nhất.

3) $m < 0$ thì (2) có nghiệm $x \geq \frac{1-5m}{m}$. Khi đó, để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì ta phải có :

$$\frac{m-2}{3} = \frac{1-5m}{m}$$

hay $m^2 + 13m - 3 = 0$. Giải phương trình này, ta thu được

$$m_1 = \frac{-13 - \sqrt{181}}{2}; m_2 = \frac{-13 + \sqrt{181}}{2} > 0$$

(nghiệm này bị loại vì không phù hợp với điều kiện $m < 0$).

Kết luận :

Khi $m = \frac{-13 - \sqrt{181}}{2}$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 8. Giải và biện luận bất phương trình kép sau đây :

$$-1 \leq \frac{x+m}{mx+1} \leq 1.$$

Giải : Điều kiện để biểu thức có nghĩa : $mx+1 \neq 0$ hay $x \neq -\frac{1}{m}$ nếu $m \neq 0$, (trường hợp $m = 0$, điều kiện $mx+1 \neq 0$ luôn luôn thỏa mãn).

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, thì bất phương trình kép đã cho tương đương với bất phương trình sau :

$$\left(\frac{x+m}{mx+1} - 1 \right) \left(\frac{x+m}{mx+1} + 1 \right) \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad \left(\frac{x+m}{mx+1} \right)^2 - 1 \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad (x+m)^2 - (mx+1)^2 \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad (x+m+mx+1)(x+m-mx-1) \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad [(1+m)x+m+1][(1-m)x+m-1] \leq 0,$$

$$\text{hay} \quad (1-m^2)(x^2-1) \leq 0. \quad (1)$$

1) Nếu $1-m^2 = 0$, tức $m = \pm 1$ thì mọi x đều là nghiệm của (1). Do điều kiện trên, ta thấy nếu $m = 1$ mọi $x \neq -1$ đều là nghiệm của bài toán ; nếu $m = -1$ mọi $x \neq 1$ đều là nghiệm của bài toán.

2) Nếu $1-m^2 > 0$ tức $-1 < m < 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $-1 \leq x \leq 1$ (nghiệm này thỏa mãn điều kiện $x \neq -\frac{1}{m}$).

3) Nếu $1-m^2 < 0$ tức là $m > 1$ hoặc $m < -1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x \leq -1$ và $x \geq 1$ (nghiệm này cũng thỏa mãn điều kiện $x \neq -\frac{1}{m}$, vì $-1 < -\frac{1}{m} < 1$).

Tóm lại : Nếu $m = 1$ thì mọi $x \neq -1$ là nghiệm.

Nếu $m = -1$ thì mọi $x \neq 1$ là nghiệm.

Nếu $-1 < m < 1$ thì nghiệm là $-1 \leq x \leq 1$.

Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì nghiệm là $x \leq -1$ và $x \geq 1$.

b) Hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa hai ẩn số

Hệ hai phương trình bậc nhất chứa hai ẩn số là hệ có dạng :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Để giải hệ này, ta lập các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 ; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2.$$

1) Nếu $D \neq 0$, tức là $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} ; y = \frac{D_y}{D} = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

2) Nếu $D = 0$ và một trong hai số D_x, D_y khác không thì hệ vô nghiệm.

3) Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô định. Khi đó, ta nhận được một phương trình vô định

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

i) Khi $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ thì mọi cặp (x, y) là nghiệm của hệ đã cho.

ii) Khi $a_1 = 0, b_1 \neq 0$ thì ta được nghiệm x tùy ý,

$$y = \frac{c_1}{b_1}$$

iii) Khi $a_1 \neq 0$, hệ có nghiệm $y = t; x = \frac{1}{a_1} (c_1 - b_1 t)$, trong

đó t là một số tùy ý.

Ví dụ 9. (Dự trữ B - 1975). Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3, \\ m(x+y) - 2y = 2. \end{cases}$$

Giải : Ta viết lại hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} 2m^2x + 3(m-1)y = 3, \\ mx + (m-2)y = 2. \end{cases}$$

Lập các định thức :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2m^2 & 3(m-1) \\ m & m-2 \end{vmatrix} = 2m^2(m-2) - 3m(m-1) = \\ &= 2m \left(m - \frac{1}{2} \right) (m-3) ; \end{aligned}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3(m-1) \\ 2 & m-2 \end{vmatrix} = 3(m-2) - 6(m-1) = -3m ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2m^2 & 3 \\ m & 2 \end{vmatrix} = 4m^2 - 3m.$$

1) Nếu $D \neq 0$, tức là $m \neq 0, m \neq \frac{1}{2}, m \neq 3$ thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{-3m}{2m \left(m - \frac{1}{2} \right) (m-3)} = - \frac{3}{2 \left(m - \frac{1}{2} \right) (m-3)} ;$$

$$y = \frac{4m^2 - 3m}{2m \left(m - \frac{1}{2}\right) (m - 3)} = \frac{4m - 3}{2 \left(m - \frac{1}{2}\right) (m - 3)}$$

2) Nếu $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = 3$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, khi đó hệ vô nghiệm.

3) Nếu $m = 0$ thì $D = D_x = D_y = 0$. Hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} -3y = 3, \\ -2y = 2. \end{cases}$$

Ta được nghiệm x tùy ý, $y = -1$.

Ví dụ 10. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} 6mx - (m - 2)y = 3, \\ (m - 1)x - my = 2. \end{cases}$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm x và y của hệ không phụ thuộc vào m .

Giải : Ta có :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 6m & -(m - 2) \\ (m - 1) & -m \end{vmatrix} = -6m^2 + (m - 1)(m - 2) = \\ &= -(m + 1)(5m - 2) ; \end{aligned}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -(m - 2) \\ 2 & -m \end{vmatrix} = -3m + 2(m - 2) = -m - 4 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6m & 3 \\ (m - 1) & 2 \end{vmatrix} = 12m - 3m + 3 = 9m + 3.$$

1) Nếu $m \neq -1$, $m \neq \frac{2}{5}$ thì hệ có nghiệm duy nhất :

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m + 4}{(m + 1)(5m - 2)} ;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = - \frac{9m + 3}{(m + 1)(5m - 2)} \quad (*)$$

2) Nếu $m = -1$ hoặc $m = \frac{2}{5}$ thì $D = 0$; $D_x \neq 0$; hệ vô nghiệm.

Tiếp theo, để thành lập mối liên hệ giữa nghiệm x và y , không phụ thuộc vào m , ta thấy rằng khi thay các giá trị của nghiệm (x, y) từ $(*)$ vào hệ đã cho sẽ thu được hệ các đẳng thức

$$\begin{cases} 6mx - (m - 2)y = 3, \\ (m - 1)x - my = 2. \end{cases}$$

Ta viết lại hệ các đẳng thức này như sau :

$$\begin{cases} (6x - y)m = 3 - 2y, \\ (x - y)m = 2 + x. \end{cases}$$

Nhân đẳng thức đầu với $x - y$, đẳng thức thứ hai với $6x - y$ vào hai vế tương ứng, ta được

$$\begin{cases} (x - y)(6x - y)m = (x - y)(3 - 2y), \\ (x - y)(6x - y)m = (6x - y)(2 + x). \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(x - y)(3 - 2y) = (6x - y)(2 + x)$.

Ví dụ 11. Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm (x, y) sao cho $x + y$ là lớn nhất :

$$\begin{cases} x + m^2y \leq m, \\ m^2x + y \leq m. \end{cases}$$

Giải : Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0) . Khi đó ta phải có

$$\begin{cases} x_0 + m^2y_0 \leq m, \\ m^2x_0 + y_0 \leq m. \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của hai bất đẳng thức trên ta thu được

$$(1 + m^2)(x_0 + y_0) \leq 2m,$$

hay
$$x_0 + y_0 \leq \frac{2m}{1 + m^2}.$$

Mà $\frac{2}{1 + m^2} \leq 1$ (vì $1 + m^2 \geq 2m$) nên suy ra $x_0 + y_0 \leq 1$.

Vậy ứng với mọi cặp nghiệm (x_0, y_0) của hệ ta đều có $x_0 + y_0 \leq 1$. Suy ra tổng $x + y$ (ứng với (x, y) là nghiệm) đạt giá trị lớn nhất bằng 1 khi $1 + m^2 = 2m$ hay $m = 1$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y \leq 1, \\ x + y \leq 1. \end{cases}$$

Ví dụ 12. 1) Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của a sao cho hệ sau đây luôn có nghiệm với mọi giá trị m :

$$\begin{cases} x + my = -m^2, \\ x + 3my \leq 1 + a. \end{cases}$$

2) Ứng với giá trị a vừa tìm được, hãy xác định m sao cho nghiệm (x, y) của hệ có tổng $x^2 + y^2$ nhỏ nhất.

Giải : 1) Với $m = 0$ hệ trở thành

$$\begin{cases} x = 0, \\ x \leq 1 + a. \end{cases}$$

Do vậy để tồn tại nghiệm x thì $1 + a \geq 0$ hay $a \geq -1$.

Xét $a = -1$. Khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x + my = -m^2, \\ x + 3my \leq 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = -m^2 - my, \\ x \leq -3my. \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi ứng với mỗi m đều tồn tại y sao cho $-m^2 - my \leq -3my$ hay bất phương trình $m(m - 2y) \geq 0$

có nghiệm với mọi m . Điều này luôn luôn đúng vì $y = 0$ luôn luôn nghiệm đúng bất phương trình. Vậy giá trị nhỏ nhất của $a = -1$.

2) Ta có $x^2 + y^2 \geq 0$, dấu bằng đạt được khi $x = y = 0$. Ứng với $a = -1$, ta chọn $m = 0$ thì hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} x = 0, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Vậy $(0 ; 0)$ là nghiệm của hệ ứng với $a = -1$, $m = 0$.

Vậy khi $m = 0$ thì hệ có nghiệm (x, y) với tổng số $x^2 + y^2$ nhỏ nhất và bằng 0.

c) Một số bài toán đưa về hệ phương trình và bất phương trình bậc nhất

Ví dụ 13. Với những giá trị nào của m thì hai phương trình sau đây có nghiệm chung :

$$2x^2 + mx - 1 = 0, \quad (1)$$

$$mx^2 - x + 2 = 0.$$

Giải : Các phương trình đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0, \\ mx^2 - x + 2 = 0. \end{cases}$$

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ :

$$\begin{cases} mx + 2y = 1, \\ -x + my = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 ; D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & m \end{vmatrix} = m + 4 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 - 2m ; D \neq 0 \text{ với mọi } m.$$

Vậy hệ (2) có nghiệm :

$$x = \frac{m+4}{m^2+2} ; y = \frac{1-2m}{m^2+2} .$$

Do $y = x^2$ nên ta phải có

$$\frac{1-2m}{m^2+2} = \left(\frac{m+4}{m^2+2} \right)^2 ,$$

hay $(m^2+2)(1-2m) = (m+4)^2,$

hay $m^3 + 6m + 7 = 0.$

Phương trình này có nghiệm duy nhất $m = -1$. Ứng với $m = -1$, các phương trình đã cho có nghiệm chung $x = 1$.

Ví dụ 14. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1, 2)$ và $B(-1, 3)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Giải : Mọi phương trình đường thẳng đều có dạng $y = ax + b$ hoặc $x = c$ (đường thẳng song song với trục tung). Trường hợp $x = c$ không xảy ra vì khi đó ta được hệ $-1 = c$, $1 = c$ không có nghiệm.

Để đường thẳng đi qua các điểm A và B , ta phải có

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 1 + b, \\ 3 = a \cdot (-1) + b; \end{cases}$$

hay $\begin{cases} a + b = 2, \\ -a + b = 3. \end{cases}$

Giải hệ này ta thu được $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{5}{2}$. Vậy phương trình đường thẳng phải tìm là $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Ví dụ 15. Viết phương trình parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ và đi qua các điểm $A(5 ; 2)$, $B(2 ; 5)$ trên mặt phẳng tọa độ.

Giải : Để parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ thì phải có $0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ suy ra $c = 0$. Vậy parabol phải tìm có dạng $y = ax^2 + bx$. Ta cần xác định các giá trị a và b sao cho

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5, \\ 5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} 25a + 5b = 2, \\ 4a + 2b = 5. \end{cases}$$

Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 30; D_a = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -21; D_b = \begin{vmatrix} 25 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 117.$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{21}{30}; b = \frac{117}{30}.$$

Phương trình của parabol cần tìm có dạng

$$y = -\frac{21}{30}x^2 + \frac{117}{30}x.$$

Ví dụ 16. Hãy xác định tất cả các giá trị của a, b sao cho nghiệm của bất phương trình sau đây là đoạn $-2 \leq x \leq 5$:

$$|x - a + 1| \leq 2b + 3.$$

Giải : 1) Nếu $2b + 3 < 0$ tức là $b < -\frac{3}{2}$ thì bất phương trình vô nghiệm.

2) Nếu $2b + 3 \geq 0$ tức là $b \geq -\frac{3}{2}$ thì bất phương trình đã cho có thể viết dưới dạng

$$-2b - 3 \leq x - a + 1 \leq 2b + 3,$$

hay

$$a - 2b - 4 \leq x \leq a + 2b + 2.$$

Ta cần chọn a, b thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} a + 2b + 2 = 5, \\ a - 2b - 4 = -2; \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a + 2b = 3, \\ a - 2b = 2. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 17. Hãy xác định tất cả các giá trị a, b ($b \geq -\frac{2}{3}$), sao cho mọi nghiệm của bất phương trình

$$|x - a + 1| \leq 2b + 3 \quad (1)$$

cũng là nghiệm của bất phương trình

$$|2x - b - 6| \leq 3b + 2. \quad (2)$$

Giải : Theo giả thiết thì $b \geq -\frac{2}{3}$, vậy $2b + 3 > 0$ và $3b + 2 \geq 0$.

Do đó có thể viết các bất phương trình (1) và (2) dưới dạng

$$-2b - 3 \leq x - a + 1 \leq 2b + 3, \quad (1')$$

$$-3b - 2 \leq 2x - b - 6 \leq 3b + 2. \quad (2')$$

Vậy nghiệm của (1') là : $a - 2b - 4 \leq x \leq a + 2b + 2$, nghiệm của (2') là : $-b + 2 \leq x \leq 2b + 4$.

Ta cần chọn a và b sao cho khoảng nghiệm của (1) được chứa trong khoảng nghiệm của (2), tức là

$$\begin{cases} a + 2b + 2 \leq 2b + 4, \\ -b + 2 \leq a - 2b - 4; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} a \leq 2, \\ a \geq b + 6 \end{cases}$$

$$\text{suy ra} \quad 2 \geq a \geq b + 6. \quad (3)$$

Theo giả thiết thì $b \geq -\frac{2}{3}$ nên $b + 6 \geq -\frac{2}{3} + 6 > 2$.

Vậy điều kiện (3) không xảy ra. Suy ra không tồn tại các số a, b (với $b \geq -\frac{2}{3}$) để mọi nghiệm của (1) là nghiệm của (2).

§3. Phương trình và bất phương trình bậc cao

Một số bài toán liên quan đến phương trình và bất phương trình bậc hai đã được trình bày trong phần tam thức bậc hai. Trong mục này, chúng ta sẽ xét một số dạng phương trình và bất phương trình giải bằng các phương trình biến đổi đại số, như phân tích một biểu thức ra thừa số, dùng các hằng đẳng thức đáng nhớ quen biết hoặc sử dụng các tính chất của tỷ lệ thức, ...

Ví dụ 18. Giải và biện luận phương trình

$$\frac{x^4 + mx^3 + n}{x^4 + x^3 + 2} = \frac{x + m}{x + 1}$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa :

$$\begin{cases} x + 1 \neq 0, & (1) \\ x^4 + x^3 + 2 \neq 0. & (2) \end{cases}$$

Ta có $x^4 + x^3 + 2 > 0$ thì $x \geq 0$. Khi $x \leq -1$ thì $(-x)^3 \geq (-x)^4$, do vậy $x^4 + x^3 + 2 \geq 2 > 0$; nếu $-1 < x < 0$ thì $(-x)^3 \leq 1$, do vậy $x^4 + x^3 + 2 \geq x^4 + 1 \geq 1 > 0$. Vậy điều kiện (2) luôn luôn thỏa mãn. Suy ra điều kiện để các biểu thức có nghĩa là $x \neq -1$.

Ta thấy rằng $x = 0$ là nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{n}{2} = \frac{m}{1}, \text{ tức là } n = 2m.$$

1) Nếu $n \neq 2m$ thì ta có thể viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$\frac{x^4 + mx^3 + n}{x^4 + x^3 + 2} = \frac{x^4 + mx^3}{x^4 + x^3}$$

Sử dụng tính chất của tỷ lệ thức : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$, ta được

$$\frac{x^4 + mx^3 + n - (x^4 + mx^3)}{x^4 + x^3 + 2 - (x^4 + x^3)} = \frac{x^4 + mx^3}{x^4 + x^3} ,$$

hay $\frac{n}{2} = \frac{x+m}{x+1}$, hay $(n-2)x = 2m-n$; (3)

i) nếu $n = 2$ thì phương trình vô nghiệm vì $2m-n \neq 0$;

ii) nếu $n \neq 2$ ta được nghiệm $x = \frac{2m-n}{n-2} \neq -1$.

2) Nếu $n = 2m$ thì ta biến đổi phương trình đã cho như sau

$$\frac{x^4 + mx^3 + 2m}{x^4 + x^3 + 2} - 1 = \frac{x+m}{x+1} - 1,$$

hay $\frac{(m-1)x^3 + 2(m-1)}{x^4 + x^3 + 2} = \frac{m-1}{x+1}$;

i) nếu $m = 1$, thì mọi $x \neq -1$ là nghiệm ;

ii) nếu $m \neq 1$, ta thu được phương trình :

$$\frac{x^3 + 2}{x^4 + x^3 + 2} = \frac{1}{x+1} ,$$

hay $(x+1)(x^3 + 2) = x^4 + x^3 + 2$,

hay $x^4 + x^3 + 2x + 2 = x^4 + x^3 + 2$,

khi đó $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

Nhận xét : 1) Ta cũng có thể giải ví dụ 18 bằng phương pháp thông thường (quy đồng mẫu số). Sau khi đơn giản các số hạng ta cũng đi đến phương trình (3).

2) Bằng cách đã được trình bày trong ví dụ 18 ta có thể giải các phương trình dạng :

$$\frac{x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1}{x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2} = \frac{x^3 + a_1x^2 + b_1x + c_1}{x^3 + a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

và các dạng tương tự.

Ví dụ 19. Giải phương trình

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 78 \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Giải : Điều kiện : $x \neq 0$. Sử dụng hằng đẳng thức

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b), \text{ ta có :}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x} \right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right).$$

Vậy phương trình đã cho có thể viết như sau

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^3 - 3 \left(x + \frac{1}{x} \right) = 78 \left(x + \frac{1}{x} \right),$$

hay

$$\left(x + \frac{1}{x} \right) \left[\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 81 \right] = 0.$$

1) $\left(x + \frac{1}{x} \right) = 0$, hay $x^2 + 1 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

$$2) \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 81 = 0, \text{ thì } x + \frac{1}{x} = \pm 9.$$

i) $x + \frac{1}{x} = 9$, hay $x^2 - 9x + 1 = 0$ có nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

ii) $x + \frac{1}{x} = -9$ hay $x^2 + 9x + 1 = 0$ có nghiệm

$$x_{3,4} = \frac{-9 \pm \sqrt{77}}{2}$$

Ví dụ 20. Hãy xác định tất cả các giá trị của a sao cho nghiệm của phương trình sau là lớn nhất, nhỏ nhất :

$$x^4 + 2x^2 + 2ax + a^2 + 2a + 1 = 0.$$

Giải : Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình. Khi đó tồn tại giá trị a sao cho $x_0^4 + 2x_0^2 + 2ax_0 + a^2 + 2a + 1 = 0$, hay phương trình (ẩn a) $a^2 + 2(x_0 + 1)a + x_0^4 + 2x_0^2 + 1 = 0$ có nghiệm.

Vậy

$$\Delta' = (x_0 + 1)^2 - (x_0^4 + 2x_0^2 + 1) \geq 0,$$

hay $(x_0 + 1)^2 - (x_0^2 + 1)^2 \geq 0$

$$(x_0^2 + x_0 + 2)(-x_0^2 + x_0) \geq 0.$$

Từ đó suy ra $0 \leq x_0 \leq 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của nghiệm bằng 0, đạt được khi

$$a = -(x_0 + 1) = -1.$$

Giá trị lớn nhất của nghiệm bằng 1, đạt được khi

$$a = -(x_0 + 1) = -2.$$

Ví dụ 21. Giải phương trình

$$(x - 1)^6 + (x - 2)^6 = 1.$$

Giải : Ta viết lại phương trình dưới dạng

$$(x - 1)^6 + (2 - x)^6 = 1. \text{ Đặt } (x - 1)(2 - x) = t.$$

Ta có :

$$(x - 1)^2 + (2 - x)^2 = 1 - 2t,$$

và
$$\begin{aligned}(x - 1)^6 + (2 - x)^6 &= [(x - 1)^2 + (2 - x)^2]^3 - \\ &- 3t^2 \cdot [(x - 1)^2 + (2 - x)^2] = (1 - 2t)^3 - \\ &- 3t^2(1 - 2t) = -2t^3 + 9t^2 - 6t + 1.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho trở thành :

$$-2t^3 + 9t^2 - 6t + 1 = 1,$$

hay :
$$2t^3 - 9t^2 + 6t = 0.$$

Giải phương trình này ta thu được các nghiệm :

$$t_1 = 0 ; t_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

1) Với $t_1 = 0$ thì $(x - 1)(2 - x) = 0$ ta được nghiệm $x = 1$ và $x = 2$.

2) Với $t_2 = \frac{9 + \sqrt{33}}{4}$ thì $(x - 1)(2 - x) = \frac{9 + \sqrt{33}}{4}$, hay

$$x^2 - 3x + 2 + \frac{9 + \sqrt{33}}{4} = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

3) Với $t_3 = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}$ thì $(x - 1)(2 - x) = \frac{9 - \sqrt{33}}{4}$, hay

$$x^2 - 3x + 2 + \frac{9 - \sqrt{33}}{4} = 0, \text{ phương trình này vô nghiệm.}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1$ và $x_2 = 2$.

Ví dụ 22. Giải phương trình :

$$(x + 4)^4 = 2(2x + 13)^3 + 50(2x + 13).$$

Giải : Đặt $2x + 13 = 2y$, khi đó $x + 4 = y - \frac{5}{2}$

và phương trình đã cho có dạng

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^4 = 16y^3 + 100y,$$

hay
$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^4 - 16y\left(y^2 + \frac{25}{4}\right) = 0. \quad (1)$$

Mà $y^2 + \frac{25}{4} = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + 5y$; nên có thể viết (1) dưới dạng
$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^4 - 16y\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - 80y^2 = 0. \quad (2)$$

Vì $y = 0$ không phải là nghiệm của (2) nên ta có thể chia cả hai vế cho y^2 :

$$\left[\frac{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{y}\right]^2 - 16 \cdot \frac{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{y} - 80 = 0.$$

Đặt $\frac{\left(y - \frac{5}{2}\right)^2}{y} = t$, ta thu được phương trình

$$t^2 - 16t - 80 = 0, \text{ với các nghiệm } t_1 = -4, t_2 = 20.$$

1) Với $t_1 = -4$, ta có $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -4y$, hay $y^2 - y + \frac{25}{4} = 0$, phương trình này vô nghiệm.

2) Với $t_2 = 20$, ta có $\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 20y$ hay

$$y^2 - 25y + \frac{25}{4} = 0, \text{ phương trình này có các nghiệm}$$

$$y_{1,2} = \frac{25 \pm 10\sqrt{6}}{2}$$

Từ đó, suy ra $2x + 13 = 25 \pm 10\sqrt{6}$,

hay $x_{1,2} = 6 \pm 5\sqrt{6}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 23. Giải và biện luận phương trình

$$x^4 - 2x^3 + x = a.$$

Giải : Biến đổi vế trái của phương trình :

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + x &= (x^4 - x^3) - (x^3 - x) = x^3(x - 1) - x(x^2 - 1) = \\ &= x(x - 1)(x^2 - x - 1) = (x^2 - x)^2 - (x^2 - x). \end{aligned}$$

Đặt $x^2 - x = t$ thì $t = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, ta thu được phương trình

$$t^2 - t = a \text{ hay } \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{4}.$$

1) Nếu $a < -\frac{1}{4}$, $\left(a + \frac{1}{4} < 0\right)$, thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Nếu $a = -\frac{1}{4}$ thì $t = \frac{1}{2}$ và $x^2 - x = \frac{1}{2}$ ta thu được hai nghiệm $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

3) Nếu $a > -\frac{1}{4}$ thì $t = \frac{1}{2} \pm \sqrt{a + \frac{1}{4}}$;

i) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$, hay $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}$. Giải phương trình này ta thu được nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}}$$

$$i) \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}},$$

$$\text{hay} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}. \quad (*)$$

Nếu $\frac{3}{4} - \sqrt{a + \frac{1}{4}} < 0$, tức là $a > \frac{5}{16}$, thì phương trình

(*) vô nghiệm. Nếu $-\frac{1}{4} < a \leq \frac{5}{16}$ thì (*) có các nghiệm

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}}$$

Tóm lại, khi $a < -\frac{1}{4}$, phương trình vô nghiệm ;

khi $a = -\frac{1}{4}$ phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2};$$

khi $a > \frac{5}{16}$ phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}};$$

khi $-\frac{1}{4} < a \leq \frac{5}{16}$ phương trình có các nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}};$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}}.$$

Ví dụ 24. Giải bất phương trình

$$\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} > 1.$$

Giải : Điều kiện để vế trái có nghĩa :

$$(x-1)^3 + 1 \neq 0,$$

hay $x(x^2 - 3x + 3) \neq 0$, hay $x \neq 0$.

Ta viết lại bất phương trình dưới dạng

$$\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} - 1 > 0,$$

hay
$$\frac{(x+1)^3 - (x-1)^3 - 2}{(x-1)^3 + 1} > 0.$$

Sau khi khai triển và rút gọn ta thu được :

$$\frac{6x^2}{x(x^2 - 3x + 3)} > 0,$$

mà $6x^2 > 0$ (do $x \neq 0$) và $x^2 - 3x + 3 > 0$, với mọi x , nên nghiệm của bất phương trình là $x > 0$.

Ví dụ 25. Giải bất phương trình :

$$\frac{2x-25}{2(x^2+2x-3)} + \frac{2x+11}{2(x^2-1)} > \frac{1}{x+3}.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 \neq 0, \\ x^2 - 1 \neq 0, \\ x + 3 \neq 0; \end{cases} \quad \text{hay } x \neq -3, x \neq -1, x \neq 1.$$

Viết lại bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$\frac{2x-25}{2(x+3)(x-1)} + \frac{2x+11}{2(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x+3} > 0.$$

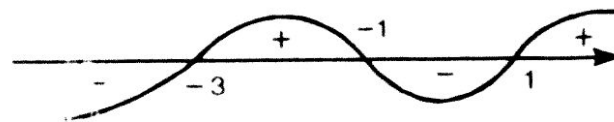
Biến đổi vế trái, ta thu được

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{2(x + 3)(x - 1)(x + 1)} > 0 \quad (1)$$

Do $x^2 - 3x + 5 > 0$, với mọi x , nên (1) tương đương với bất phương trình

$$(x + 3)(x - 1)(x + 1) > 0 \quad (2)$$

Bằng cách lập bảng xét dấu vế trái, hoặc bằng biểu diễn



Hình 4

ta được các khoảng nghiệm là $-3 < x < -1$ và $x > 1$.

Ví dụ 26. Xét đa thức bậc n

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Đặt $M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$.

Chứng minh rằng mọi $x \geq M + 1$ là nghiệm của bất phương trình : $|x|^n > |a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n|$. (1)

Giải : Do $M \geq 0$, nên từ bất phương trình $x \geq M + 1$, suy ra

$$0 < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{M+1} \quad \text{và}$$

$$|a_k x^{n-k}| = |a_k| \cdot |x|^{n-k} \leq M(M+1)^{-k} |x|^n, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đó suy ra, khi $x \geq M + 1$, thì sẽ có :

$$\begin{aligned} |a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| &\leq |a_1| \cdot |x|^{n-1} + \\ &+ |a_2| \cdot |x|^{n-2} + \dots + |a_n| \cdot |x|^{n-n} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M(M+1)^{-1}|x|^n + M(M+1)^{-2}|x|^n + \dots + \\
&\quad + M(M+1)^{-n}|x|^n = M|x|^n[(M+1)^{-1} + \\
&\quad + (M+1)^{-2} + \dots + (M+1)^{-n}] = \\
&= \frac{M|x|^n}{M+1} \cdot \frac{1 - (M+1)^{-n}}{1 - \frac{1}{M+1}} = |x|^n \left[1 - \frac{1}{(M+1)^n} \right] < |x|^n.
\end{aligned}$$

§4. Hệ phương trình bậc cao

a) *Hệ đối xứng*. Ta gọi một hệ phương trình là hệ đối xứng nếu khi ta đổi vị trí các ẩn cho nhau ta lại nhận được hệ mới trùng với hệ ban đầu. Đối với các hệ hai ẩn số có dạng này, do tính đối xứng đó bao giờ ta cũng có các cặp nghiệm đối xứng nhau (nếu hệ phương trình đã cho có nghiệm), và nếu biểu diễn các nghiệm trên mặt phẳng tọa độ thì ta thấy các nghiệm tạo thành từng cặp điểm đối xứng với nhau qua đường phân giác góc thứ nhất và góc thứ ba của hệ trục tọa độ. Do vậy, khi giải các hệ này, đôi khi chỉ cần tìm các nghiệm của hệ theo một thứ tự xác định rồi suy ra tất cả các nghiệm còn lại bằng cách thay đổi vai trò của các ẩn.

Ví dụ 27. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 = 17. \end{cases}$$

Giải : Ta viết lại hệ dưới dạng

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy, \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 17; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy, \\ (3 - xy)^2 - 2x^2y^2 = 17; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy, \\ x^2y^2 + 6xy + 8 = 0. \end{cases}$$

Giải phương trình thứ hai với ẩn (xy) ta được $xy = -2$; $xy = -4$. Kết hợp với phương trình đầu, ta được các hệ

$$1) \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 3 - 2, \\ xy = -2, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + y = \pm 1, \\ xy = -2, \end{cases}$$

ta được các hệ nghiệm là $x_1 = 1, y_1 = -2$; $x_2 = 2, y_2 = -1$; $x_3 = -1, y_3 = 2$; $x_4 = -2, y_4 = 1$.

$$2) \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 3 - 4, \\ xy = -4, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = -1, \\ xy = -4 \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm.

Ví dụ 28. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 18, \\ x(x + 1)y(y + 1) = 72. \end{cases}$$

Giải : Đặt các ẩn số phụ : $x(x + 1) = u$; $y(y + 1) = v$, ta thu được hệ mới

$$\begin{cases} u + v = 18, \\ uv = 72. \end{cases}$$

Giải hệ này ta thu được $u = 12, v = 6$ và $u = 6, v = 12$.

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} x(x + 1) = 12, \\ y(y + 1) = 6, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x^2 + x - 12 = 0, \\ y^2 + y - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x = 3; & x = -4, \\ y = 2; & y = -3. \end{cases}$$

Tương tự, ứng với $u = 6, v = 12$ ta được các nghiệm

$$\begin{cases} x = 2; & x = -3. \\ y = 3; & y = -4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là : $x_1 = 3, y_1 = 2$; $x_2 = -4, y_2 = 2$;
 $x_3 = 2, y_3 = 3$; $x_4 = 2, y_4 = -4$; $x_5 = 3, y_5 = -3$; $x_6 = -4,$
 $y_6 = -3$; $x_7 = 3, y_7 = 3$; $x_8 = -3, y_8 = -4$.

Ví dụ 29. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 - y^2) = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15. \end{cases}$$

Giải : Viết lại hệ phương trình đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} (x + y)(x - y)^2 = 3, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 15, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} (x + y)[(x + y)^2 - 4xy] = 3, \\ (x + y)[(x + y)^2 - 2xy] = 15, \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} (x + y)^3 - 4xy(x + y) = 3, \\ (x + y)^3 - 2xy(x + y) = 15. \end{cases} \quad (1)$$

Trừ các vế tương ứng của phương trình thứ hai cho phương trình thứ nhất, ta được

$$2xy(x + y) = 12, \text{ suy ra } xy = \frac{6}{x + y}.$$

Thay giá trị của xy từ (2) vào phương trình thứ nhất của (1) ta được : $(x + y)^3 - 24 = 3$, hay $x + y = 3$.

Thay giá trị này vào (2) ta được : $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$

Giải hệ này ta được các nghiệm là :

$$x_1 = 2, y_1 = 1 ; x_2 = 1, y_2 = 2.$$

Ví dụ 30. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = b. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện để biểu thức có nghĩa : $x^2 + y^2 > 0$.

Ta biến đổi : $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

Và do đó có thể viết hệ phương trình đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{(x + y)^3 - 3xy(x + y)}{(x + y)^2 - 2xy} = b, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x + y = a, \\ \frac{a^3 - 3axy}{a^2 - 2xy} = b, \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} x + y = a, \\ (3a - 2b)xy = a^2(a - b). \end{cases} \quad (1)$$

1) Nếu $3a - 2b = 0$, tức là $b = \frac{3a}{2}$ và $a(a - b) \neq 0$, thì hệ vô nghiệm.

2) Nếu $3a - 2b = 0$ và $a(a - b) = 0$, tức là $a = b = 0$, thì hệ (1) có dạng $\begin{cases} x + y = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$

Vậy mọi cặp $x = t, y = -t$, với $t \neq 0$ tùy ý là nghiệm.

3) Nếu $3a - 2b \neq 0$ thì có thể viết (1) dưới dạng

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = \frac{a^2(a - b)}{3a - 2b}. \end{cases}$$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình

$$t^2 - at + \frac{a^2(a-b)}{3a-2b} = 0, \quad (*)$$

$$\Delta = a^2 - \frac{4a^2(a-b)}{3a-2b} = \frac{a^2(2b-a)}{3a-2b}$$

i) Nếu $a = 0$, thì $\Delta = 0$ ta được nghiệm $x = y = 0$ (loại).

ii) Xét $a \neq 0$. Nếu $(2b-a)(3a-2b) < 0$, tức là

$\left(\frac{2b}{a} - 1\right) \left(3 - 2\frac{b}{a}\right) < 0$, tức là $\frac{b}{a} < \frac{1}{2}$ hoặc $\frac{b}{a} > \frac{3}{2}$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó hệ đã cho vô nghiệm.

Còn nếu $\Delta \geq 0$, tức là $\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{3}{2}$ thì hệ đã cho có các nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right), \\ y_1 = \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right) \end{cases}$$

và
$$\begin{cases} x_2 = \frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right), \\ y_2 = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{2b-a}{3a-2b}}\right). \end{cases}$$

b) Một số hệ phương trình đại số dạng đặc biệt.

Các hệ phương trình đại số tổng quát thường rất khó giải và không thể nêu ra phương pháp chung để giải chúng. Trong mục này, chúng ta xét một số hệ phương trình có thể giải bằng các phương pháp sơ cấp đơn giản như đặt ẩn số phụ, sử dụng các phép biến đổi tương đương, ...

Ví dụ 31. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^3 + y^3 = 8. \end{cases}$$

Giải : Ta viết lại hệ đã cho như sau :

$$\begin{cases} y = x - 2, \\ y^3 = -x^3 + 8; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} y^3 = (x - 2)^3, \\ y^3 = -x^3 + 8. \end{cases}$$

Từ đó suy ra $(x - 2)^3 = -x^3 + 8 = -(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$,
hay sau khi chuyển vế và rút gọn ta được

$$(x - 2)(x^2 - x + 4) = 0.$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm, thay vào hệ đã cho ta thu được $y = 0$.

Nghiệm của hệ đã cho là $x = 2, y = 0$.

Ví dụ 32. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = m, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 2. & (2) \end{cases}$$

Giải : Từ (1) ta nhận được $y = m - x$. Thế biểu thức này của y vào (2) ta được

$$x^2 - (m - x)^2 + 2x = 2,$$

hay
$$2(m + 1)x = 2 + m^2. \quad (3)$$

1) Nếu $m = -1$ thì (3) vô nghiệm, do đó hệ đã cho vô nghiệm

2) Nếu $m \neq -1$ thì $x = \frac{2 + m^2}{2(m + 1)}$. Từ đó suy ra

$$y = m - x = m - \frac{2 + m^2}{2(m + 1)} = \frac{m^2 + 2m - 2}{2(m + 1)}$$

Vậy ta được nghiệm

$$x = \frac{2 + m^2}{2(m + 1)}, \quad y = \frac{m^2 + 2m - 2}{2(m + 1)}$$

Ví dụ 33. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} x(3 - 4y^2) = m(3 - 4m^2), \\ y(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2). \end{cases}$$

Giải : Từ hệ đã cho, suy ra

$$x(3 - 4y^2) = y(3 - 4x^2), \text{ hay } (x - y)(3 + 4xy) = 0.$$

1) $x - y = 0$, tức là $y = x$, khi đó hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} x(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2), \\ x(3 - 4x^2) = m(3 - 4m^2); \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad 3x - 4x^3 = 3m - 4m^3,$$

$$\text{hay} \quad (x - m)(-4x^2 - 4mx - 4m^2 + 3) = 0.$$

Từ đó ta được các nghiệm là :

$$x = y = m; \quad x = y = \frac{-m \pm \sqrt{3(1 - m^2)}}{2}, \text{ khi } m^2 \leq 1.$$

2) $3 + 4xy = 0$, hay $xy = -\frac{3}{4}$. Thế vào phương trình đầu của hệ :

$$3x - 4xy^2 = m(3 - 4m^2),$$

ta được :

$$3x - 4y \left(-\frac{3}{4} \right) = m(3 - 4m^2),$$

$$\text{hay} \quad x + y = \frac{1}{3} m(3 - 4m^2).$$

Vậy ta có hệ

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{3} m(3 - 4m^2), \\ xy = -\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Suy ra x, y là các nghiệm của phương trình bậc hai

$$t^2 - \frac{1}{3} m(3 - 4m^2)t - \frac{3}{4} = 0$$

Từ đó, ta được các nghiệm :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{6} m(3 - 4m^2) + \frac{1}{6} \sqrt{m^2(3 - 4m^2)^2 + 27}, \\ y_1 = \frac{1}{6} m(3 - 4m^2) - \frac{1}{6} \sqrt{m^2(3 - 4m^2)^2 + 27}; \\ x_2 = \frac{1}{6} m(3 - 4m^2) - \frac{1}{6} \sqrt{m^2(3 - 4m^2)^2 + 27}, \\ y_2 = \frac{1}{6} m(3 - 4m^2) + \frac{1}{6} \sqrt{m^2(3 - 4m^2)^2 + 27}. \end{cases}$$

Ví dụ 34. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 2x + a^2(y - 1), \\ y^2 = 2y + a^2x(x - 2). \end{cases}$$

Giải : 1) Nếu $a = 0$ thì hệ có dạng $\begin{cases} x^2 = 2x, \\ y^2 = 2y. \end{cases}$

Từ đó ta giải được các nghiệm $x = 0, y = 0$; $x = 0, y = 2$;
 $x = 2, y = 0$; $x = 2, y = 2$.

2) Nếu $a \neq 0$ thì từ hệ đã cho ta được

$$\begin{cases} y - 1 = \frac{1}{a^2} (x^2 - 2x), \\ (y - 1)^2 = a^2(x - 2)x + 1. \end{cases} \quad (1)$$

Từ đó ta thu được phương trình

$$\frac{1}{a^4} (x^2 - 2x)^2 = a^2 x(x - 2) + 1.$$

hay $(x^2 - 2x)^2 - a^6(x^2 - 2x) - a^4 = 0$, từ đó

$$x^2 - 2x = \frac{a^6 \pm a^2 \sqrt{a^8 + 4}}{2},$$

hay $(x - 1)^2 = \frac{a^6 + 2 \pm a^2 \sqrt{a^8 + 4}}{2} \quad (2)$

Ta thấy vế phải của (2) luôn không âm với $a \neq 0$. Thật vậy, bất đẳng thức $a^6 + 2 - a^2 \sqrt{a^8 + 4} > 0$ là hiển nhiên.

Bất đẳng thức $a^6 + 2 - a^2 \sqrt{a^8 + 4} \geq 0$ tương đương với (sau khi chuyển vế và bình phương) bất đẳng thức $a^6 + 1 \geq a^4$. Bất đẳng thức cuối cùng này đúng vì nếu $a \neq 0$ thì $a^2 > 0$ và với $0 < a^2 < 1$ bất đẳng thức là rõ, còn với $a^2 \geq 1$ thì ta có $a^6 + 1 > a^6 \geq a^4$.

Từ (2) ta được các nghiệm

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{a^6 + 2 \pm a^2 \sqrt{a^8 + 4}}{2}.$$

Từ (2) và (1) ta tính được y :

$$y = 1 + \frac{1}{a^2} (x^2 - 2x) = \frac{a^4 \pm \sqrt{a^8 + 4}}{2} + 1.$$

Ví dụ 35. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz - zx = 7, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14. \end{cases}$$

Giải : Vì $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$ nên có thể viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz - zx = 7, \\ (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 14; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz - zx = 7, \\ xy + yz + zx = 11. \end{cases}$$

Từ hai phương trình cuối của hệ ta suy ra $zx = 2$.

Vậy hệ trở thành

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y(x + z) = 9; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} y + (x + z) = 6, \\ y(x + z) = 9. \end{cases}$$

Vậy y và $x + z$ là các nghiệm của phương trình

$$t^2 - 6t + 9 = 0, \text{ tức là } t = 3.$$

Vậy $y = x + z = 3$.

Từ đó, ta được hệ phương trình để xác định z, x :

$$\begin{cases} x + z = 3, \\ xz = 2. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x = 1, z = 2$; $x = 2, z = 1$. Từ đó ta nhận được nghiệm của hệ đã cho là

$$x = 1, z = 2, y = 3 ; x = 2, z = 1, y = 3.$$

c) *Hệ bất phương trình.*

Ví dụ 36. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x^3 + x^2 - x - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Giải : Hệ đã cho có thể viết dưới dạng :

$$\begin{cases} (x + 2)(x - 3) \leq 0, & (1) \\ (x - 1)(x + 1)^2 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

(1) có nghiệm là $-2 \leq x \leq 3$, (2) có nghiệm là $x \geq 1$ và $x = -1$. Kết hợp lại ta được nghiệm của hệ là $1 \leq x \leq 3$, $x = -1$.

Ví dụ 37. Giải và biện luận hệ bất phương trình

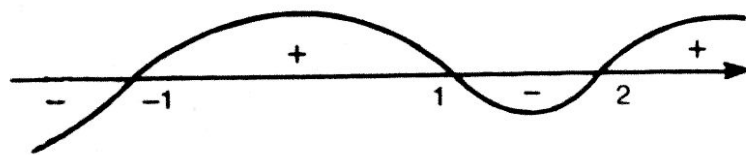
$$\begin{cases} (x^2 - 1)(x - 2) \geq 0, \\ x^2 - (3a + 1)x + a(2a + 1) \leq 0. \end{cases}$$

Giải : Ta viết lại hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} (x + 1)(x - 1)(x - 2) \geq 0, \\ (x - a)(x - 2a - 1) \leq 0. \end{cases}$$

Bằng cách lập bảng xét dấu vế trái ta nhận được nghiệm của các bất phương trình đầu : $-1 \leq x \leq 1$; $x \geq 2$.

Chú ý : Dấu của $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ cũng dễ thấy nhờ biểu diễn



Hình 5

1) Nếu $a \leq 2a + 1$, tức là $a \geq -1$, thì nghiệm của bất phương trình thứ hai là $a \leq x \leq 2a + 1$. Khi đó :

i) Nếu $a \geq 2$ thì nghiệm của hệ là $a \leq x \leq 2a + 1$.

ii) Nếu $1 < a < 2$ thì nghiệm của hệ là $2 \leq x \leq 2a + 1$.

iii) Nếu $0 \leq a \leq 1/2$ thì $1 \leq 2a + 1 < 2$ ta được nghiệm :
 $a \leq x \leq 1$.

iv) Nếu $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ thì $2 \leq 2a + 1 \leq 3$, khi đó hệ có nghiệm :
 $2 \leq x \leq 2a + 1$ và $a \leq x \leq 1$.

v) Nếu $-1 \leq a < 0$ thì $-1 \leq 2a + 1 < 1$, hệ có nghiệm :
 $a \leq x \leq 2a + 1$.

2) Nếu $2a + 1 < a$, tức là $a < -1$, thì nghiệm của bất phương trình thứ hai là $2a + 1 \leq x \leq a < -1$. Trường hợp này, hệ vô nghiệm vì các khoảng nghiệm không có điểm chung.

Ví dụ 38. Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm duy nhất :

$$x^2 + (2a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0, \quad (1)$$

$$x^4 - 5x^2 + 4 < 0. \quad (2)$$

Giải : Nhận xét rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt vì $\Delta = 9 > 0$. Giải bất phương trình thứ hai của hệ ta được các khoảng nghiệm : $-2 < x < -1$ và $1 < x < 2$, để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình

$$f(x) = x^2 + (2a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0$$

phải có đúng một nghiệm nằm trong một trong hai khoảng $(-2 ; -1)$ và $(1 ; 2)$. Vậy phải có :

$$1) \text{ hoặc } \begin{cases} f(-2)f(1) < 0, \\ f(1)f(2) \geq 0; \end{cases}$$

(để trong khoảng $(-2 ; -1)$ phương trình có một nghiệm và khi đó trong khoảng $(1 ; 2)$ không có nghiệm) ;

$$2) \text{ hoặc } \begin{cases} f(-2)f(-1) \geq 0, \\ f(1)f(2) < 0; \end{cases}$$

(để trong khoảng $(1 ; 2)$ phương trình có một nghiệm và khi đó trong khoảng $(-2 ; -1)$ không có nghiệm).

Ta có : $f(-2) = a^2 - 3a$; $f(-1) = a^2 - a - 2$;

$$f(1) = a^2 + 3a$$
 ; $f(2) = a^2 + 5a + 4$

Xét trường hợp 1) :

$$\begin{cases} (a^2 - 3a)(a^2 - a - 2) < 0, \\ (a^2 + 3a)(a^2 + 5a + 4) \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm $2 < a < 3$.

Xét trường hợp 2) :

$$\begin{cases} (a^2 - 3a)(a^2 - a - 2) \geq 0, \\ (a^2 + 3a)(a^2 + 5a + 4) < 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm $-4 < a < -3$.

Vậy khi $2 < a < 3$ hoặc $-4 < a < -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Chú ý : Ta có thể rút gọn cách giải trên như sau :

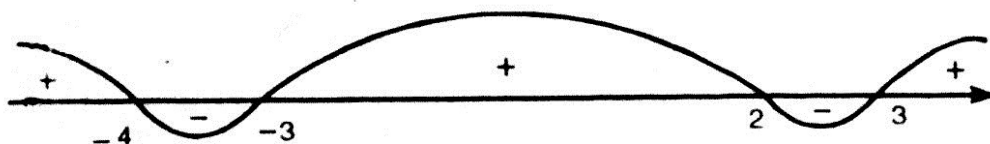
Vì $f(-2).f(-1)$ và $f(1).f(2)$ phải trái dấu nhau nên

$$f(-2).f(-1).f(1).f(2) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 3a)(a^2 - a - 2)(a^2 + 3a)(a^2 + 5a + 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3)(a + 3)(a - 2)(a + 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < a < -3, \\ 2 < a < 3. \end{cases}$$



Hình 6

Bài này cũng có thể giải trực tiếp bằng cách 3 là tính nghiệm của (1) và so sánh các nghiệm này với khoảng nghiệm của (2).

Tuy nhiên, trong một số trường hợp cách này không thuận tiện vì phải giải nhiều phương trình chứa căn thức.

Ví dụ 39. Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^4 + y^4 \leq 1, \\ x^5 + y^5 \geq 1. \end{cases}$$

Giải : Từ bất phương trình thứ nhất của hệ, ta suy ra $x^4 \leq 1$ và $y^4 \leq 1$. Vậy $-1 \leq x \leq 1$ và $-1 \leq y \leq 1$.

Nếu $x < 0$, thì từ bất phương trình thứ hai suy ra :

$$y^5 \geq 1 - x^5 > 1 \text{ hay } y > 1.$$

Tương tự, nếu $y < 0$ thì $x > 1$. Vậy mọi nghiệm của hệ bất phương trình đã cho đều thỏa mãn điều kiện :

$$0 \leq x \leq 1 ; 0 \leq y \leq 1.$$

1) Xét $0 < x < 1$. Khi đó, từ bất phương trình đầu, ta được $y^4 \leq 1 - x^4 < 1$, do vậy $0 < y < 1$. Suy ra :

$$x^5 < x^4,$$

$$y^5 < y^4.$$

Cộng các vế tương ứng, ta thu được $x^5 + y^5 < x^4 + y^4$.

Vậy nếu hệ có nghiệm $(x ; y)$ thì phải có :

$$1 \leq x^5 + y^5 < x^4 + y^4 \leq 1 \text{ hay } 1 < 1 ;$$

điều này không thể xảy ra. Vậy, trong trường hợp này hệ đã cho vô nghiệm.

2) Nếu $x = 0$ thì hệ đã cho trở thành $\begin{cases} y^4 \leq 1, \\ y^5 \geq 1, \end{cases}$ ta nhận được $y = 1$.

Trường hợp này có nghiệm $x = 0, y = 1$.

3) Nếu $x = 1$ thì hệ trở thành

$$\begin{cases} 1 + y^4 \leq 1, \\ 1 + y^5 \geq 1, \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y^4 \leq 0, \\ y^5 \geq 0. \end{cases}$$

từ đó suy ra $y = 0$. Vậy nghiệm của hệ là $x = 1, y = 0$.

Tóm lại, hệ bất phương trình đã cho có nghiệm

$$x_1 = 0, y_1 = 1; x_2 = 1, y_2 = 0.$$

Ví dụ 40. Giải và biện luận hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 \leq a. \end{cases}$$

Giải : Ta có $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$

Vậy : hệ có thể viết dưới dạng

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \leq a, \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 2x^2y^2 \geq 4 - a. \end{cases}$$

Nếu hệ có nghiệm $(x; y)$ thì :

$$2 = x^2 + y^2 \geq 2|x| \cdot |y| \text{ hay } 2x^2y^2 \leq 2.$$

Vậy nếu $4 - a > 2$ hay $a < 2$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

Xét $a \geq 2$.

1) Nếu $a \geq 4$ thì bất phương trình thứ hai của (1) nhận mọi (x, y) làm nghiệm. Vậy hệ (1) tương đương với $x^2 + y^2 = 2$, có nghiệm là

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\cos\varphi; \\ y &= \sqrt{2}\sin\varphi, \varphi - \text{tùy ý.} \end{aligned}$$

2) Nếu $2 \leq a < 4$ thì có thể viết (1) như sau :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ 2|x| \cdot |y| \geq \sqrt{8 - 2a}. \end{cases}$$

$$\text{Đặt } |x| = \sqrt{2}\cos\varphi ; |y| = \sqrt{2}\sin\varphi ; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} .$$

Ta được :

$$4\cos\varphi \cdot \sin\varphi \geq \sqrt{8-2a}, \text{ hay } \sin 2\varphi \geq \frac{1}{2} \sqrt{8-2a} .$$

$$\text{Đặt } \frac{1}{2} \sqrt{8-2a} = \sin\alpha ; 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} .$$

Ta được nghiệm của $\sin 2\varphi \geq \sin\alpha$ là :

$$\alpha \leq 2\varphi \leq \pi - \alpha \text{ hay } \frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} .$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} |x| = \sqrt{\cos\varphi}, \\ |y| = \sqrt{\sin\varphi} ; \end{cases} \text{ trong đó } \frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} .$$

Suy ra nghiệm của hệ đã cho là :

$$(x_1, y_1), (x_1, y_2),$$

$$(x_2, y_1), (x_2, y_2)$$

với

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{2}\cos\varphi,$$

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{2}\sin\varphi ; \text{ trong đó } \frac{\alpha}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} ;$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{8-2a} .$$

Ví dụ 41. Hãy xác định các giá trị của a sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 \leq a, \\ (x+1)^2 + y^2 \leq a. \end{cases}$$

Giải : Trước hết, ta có nhận xét rằng nếu $x = \alpha, y = \beta$ là nghiệm của hệ thì $x = \beta, y = \alpha$ cũng là nghiệm (do vai trò bình đẳng của x và y trong hệ). Do vậy, nếu $\alpha \neq \beta$ thì hệ sẽ có ít

nhất hai nghiệm khác nhau (nếu hệ có nghiệm). Từ đó suy ra $\alpha = \beta$, và ta được :

$$\alpha^2 + (\alpha + 1)^2 \leq a,$$

hay $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 - a \leq 0. \quad (1)$

Nếu $\Delta' = 1 - 2(1 - a) < 0$ tức là $a < \frac{1}{2}$, thì (1) vô nghiệm

Nếu $a > \frac{1}{2}$ thì (1) có nghiệm là $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ với $\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta'}}{2}$ nên hệ đã cho không duy nhất nghiệm.

Xét $a = \frac{1}{2}$ lúc đó (1) có nghiệm $\alpha = -\frac{1}{2}$ duy nhất và hệ đã cho nhận $x = y = -\frac{1}{2}$ làm nghiệm.

Ta cần xét xem ngoài nghiệm này, hệ đã cho có còn nghiệm khác nữa không. Ta có

$$\begin{cases} x^2 + (y + 1)^2 \leq \frac{1}{2}, \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Suy ra

$$x^2 + (x + 1)^2 + y^2 + (y + 1)^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \text{ hay}$$

$2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$. Mặt khác, vế trái luôn luôn không âm, nên ta phải có

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0, \\ y + \frac{1}{2} = 0, \end{cases} \text{ hay } x = y = -\frac{1}{2}.$$

Vậy, với $a = \frac{1}{2}$ thì hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = -\frac{1}{2}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1. Giải và biện luận các phương trình sau :

$$a) \frac{x+a}{b+a} + \frac{x-a}{b-a} = a ;$$

$$b) \frac{x+a}{b-a} + \frac{x-a}{b+a} = \frac{2}{a^2+b^2} ;$$

$$c) (x-a)(x-b)(x-c) + abc = 0.$$

2. Giải các phương trình :

$$a) (x^2 - 2x)^2 - 2(x-1)^2 + 2 = 0 ;$$

$$b) (2x-1)(2x+3)(x+2)(x+4) + 9 = 0 ;$$

$$c) x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 1 ;$$

$$d) \frac{3x}{x^2-4x+1} - \frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{8}{3}.$$

3. Giải các phương trình :

$$a) x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0 ;$$

$$b) 2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0 ;$$

$$c) (x+3)^4 - (x^2+x-6)^2 = 2(x-2)^4 ;$$

$$d) 2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1).$$

4. Cho phương trình bậc 3

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, c sao cho

a) (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số nhân ;

b) (1) có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng.

5. Xác định m để

$$f(x) = m \sin x + m^2 - 2 > 0 \text{ với } \forall x.$$

6. Cho các hàm số

$$f(x) = (m^2 - 4m + 2) \frac{2x}{x^2 + 1} + m,$$

$$g(x, y) = (m \sin y - m^2 + 2)x^2 + 4mx + 1.$$

Hãy xác định m sao cho

a) $f(x) > 0 \forall x$;

b) $f(x) < 0 \forall x$;

c) $g(x, y) > 0 \forall x, y$.

7. Giải bất phương trình

$$\frac{(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 4x - 12)(x - 3)(x - 5)}{(x - 2)^2(x - 8)(x - 10)(x^2 + x - 1)} > 0.$$

8. Cho 3 phương trình

$$x^2 + ax + ac = 0, \quad (1)$$

$$x^2 - bx + c^2 = 0, \quad (2)$$

$$x^4 - bx^2 + c^3 = 0. \quad (3)$$

Tìm sự liên hệ giữa a, b, c sao cho các phương trình trên đều có nghiệm, hơn nữa (1) và (2) có nghiệm chung, (3) là phương trình hệ quả của (1).

Các nghiệm của (1) có trị tuyệt đối nhỏ hơn 1.

9. Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m(x + 1) + m^2x \leq 1 + m$;

b) $(m^2 + 4m + 3)x \leq m + 1 \leq (m^2 - 4m + 3)x$;

c) $\frac{x + m}{m + 1} + \frac{x - m}{m - 1} > \frac{x - m}{m + 1} + \frac{m + x}{m - 1}$.

10. Xác định m để các hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} mx^2 + (m+1)x + 1 = 0, \\ (m+1)x^2 + mx + 1 = 0; \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 2 = 0, \\ 2mx^2 + 2x + m^2 - 1 = 0, \\ 2x^2 + (m^2 - 1)x + 2m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

11. Giải và biện luận các hệ :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} ax + by = a + b, \\ bx + ay = a - b; \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} (a-1)x + y = a-2, \\ x + (a-1)y = a; \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x \sin \alpha + y \cos \alpha = \sin \alpha, \\ x \cos \alpha + y \sin \alpha = \cos \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

12. Hãy tìm a biết rằng với mỗi giá trị của b có thể tìm được ít nhất 1 giá trị của c sao cho các hệ sau đây có ít nhất 1 nghiệm :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1; \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} bx + y = c^2a, \\ x + by = ac + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

13. Giải các hệ phương trình và bất phương trình :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1; \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = 1, \\ x^9 + y^9 = 1; \end{cases} \\ \text{c)} \quad & \begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ 2x - y^2 = -6; \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} xy - 3x - 2y = 16, \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 45. \end{cases} \end{aligned}$$

14. Giải và biện luận :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + b^2, \\ x^3 - y^3 = a^3 - b^3; \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = 12x^2y^2; \end{cases} \end{aligned}$$

$$c) \begin{cases} x - y = b, \\ x^5 - y^5 = a^5; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + y = a, \\ x^4 + y^4 = b^4; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = a, \\ x^4 + y^4 + x + y - 2(x^3 + y^3) = b. \end{cases}$$

15. Giải các hệ sau :

$$a) \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y + z - x = \frac{xyz}{a^2}, \\ x + z - y = \frac{xyz}{b^2}, \\ x + y - z = \frac{xyz}{c^2}; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{13}{6}, \\ xy = 5; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ xy = 3. \end{cases}$$

16. Giải và biện luận :

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^3 + y^3 \geq 1 + a^2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 \leq a; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 \leq a^2; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 = (x - a)y, \\ y^2 = 9ax + xy; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{xy}{x+y} = a, \\ \frac{xz}{x+z} = a, \\ \frac{yz}{x+z} = a^2. \end{cases}$$

17. Giải các hệ sau :

$$a) \begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4xy + 3y^2} = x + 1, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \sqrt{x} - y^5 = 2, \\ 2y^{10} - 3y^5\sqrt{x} + 3x = 20. \end{cases}$$

18. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} x + y + z = -2, \\ xy + yz + zx = -1, \\ xyz = 2; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^3 + y^2z^2 = 6, \\ xyz = -2, x > 0; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z = -2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -6, \\ z \geq 1. \end{cases}$$

19. Xác định m để hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2m, \\ xy = m - \frac{1}{2} \end{cases}$$

có 2 nghiệm.

20. Tìm a sao cho hệ sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x - y = a(1 + xy), \\ 2 + x + y + xy = 0. \end{cases}$$

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I

2. a) Đặt $t = x^2 - 2x$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

b) Đặt $2x^2 - 7x = t$, $x = (-7 \pm \sqrt{73}) \frac{1}{4}$.

c) Thêm vào 2 vế biểu thức $2x \left(\frac{x}{x-1} \right)$;

$$x = (1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}) \frac{1}{2}.$$

d) Chia tử và mẫu các phân thức cho x ,

đặt $x + \frac{1}{x} = t$, $x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

3. a) Đặt $t = x - \frac{2}{x}$ sau khi chia 2 vế cho x^2 .

b) Chia 2 vế cho x^2 , đặt $t = x + \frac{5}{x}$.

c) Chia 2 vế cho $(x-2)^4$, đặt $\left(\frac{x+3}{x-2} \right)^2 = t$.

d) Chia 2 vế cho $(x-1)^2$, đặt $\frac{x^2+x+1}{x-1} = t$.

4. Dựa vào định lý Viet : giả sử x_1, x_2, x_3 là 3 nghiệm của phương trình bậc 3 đã cho, khi đó

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c, \end{cases}$$

và tính chất của cấp số cộng, cấp số nhân.

a) $c \neq 0$, $b^3 = a^3c$, c nằm trong khoảng giữa

$$-a^3 \text{ và } \frac{a^3}{27}$$

$$b) \begin{cases} 27c - 9ab + 2a^3 = 0, \\ 3a^2 - 9b \geq 0. \end{cases}$$

5. Xét hàm bậc nhất $\varphi(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Để $\varphi(x) > 0$ với $\alpha \leq x \leq \beta$ cần và đủ là

$$\begin{cases} \varphi(\alpha) > 0, \\ \varphi(\beta) > 0. \end{cases}$$

Đặt $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$,

$$f(x) = \varphi(t) = mt + m^2 - 2,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(-1) > 0, \\ \varphi(1) > 0. \end{cases} \text{ Đáp số : } |m| > 2.$$

$$6. \text{ Đặt } y = \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow -1 \leq y \leq 1,$$

$$\Rightarrow (m^2 - 4m + 2)y + m = \varphi(y).$$

a) và b) giải tiếp như bài 5.

$$c) g(x, y) = (m \sin y - m^2 + 2)x^2 + 4mx + 1,$$

coi $g(x, y)$ là tam thức đối với x :

$$g(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \Leftrightarrow \Delta' = 4m^2 - (m \sin y - m^2 + 2) < 0, \quad \forall y$$

và $a = m \sin y - m^2 + 2 > 0, \quad \forall y.$

Giải tiếp như bài 5.

7. Xem phần mở đầu, bất phương trình và vế trái là một thương.

8. Hoặc $a = c = 0$,

$$\text{hoặc } c = 0, 0 < |a| < 1, b = a^2.$$

10. a) $m = 0$ hệ vô nghiệm, $m = -1$ hệ có nghiệm.

Xét $m \neq 0, \neq -1$ khi đó hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1 = (2m + 1)^2 - 8m \geq 0, \\ \Delta_2 = m^2 + 8(2m + 1) \geq 0 \end{cases}$$

và 2 phương trình có ít nhất 1 nghiệm chung và kết luận chỉ có $m = -1$ thì hệ có nghiệm.

b) $m = -1$.

11. a) Hệ có nghiệm duy nhất nếu $D = a^2 - b^2 \neq 0$.

Nếu $a^2 = b^2 \neq 0$ hệ vô nghiệm.

Nếu $a = b = 0$ hệ vô định.

b) Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 2$ hệ có nghiệm duy nhất.

Nếu $a = 0$ hoặc $a = 2$ hệ vô nghiệm.

c) $D = \cos 2\alpha, D_x = 0, D_y = 0$.

Nếu $\cos 2\alpha \neq 0 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất,

Nếu $D = 0$ thì hệ vô định.

12. a) Xét $b \neq \pm 2$, khi đó $D \neq 0$ hệ có nghiệm duy nhất với $\forall a, c$.

Xét $b = \pm 2$. Đáp số : $0 > a \geq -1$.

b) $|a| \geq 4$.

13. a) $x_1 = 0, y_1 = 1 ; x_2 = 1, y_2 = 0$.

b) $x_1 = 0, y_1 = 1 ; x_2 = 1, y_2 = 0$.

c) $(6, \pm \sqrt{11}), (-6, \pm \sqrt{11})$.

d) Viết hệ thành

$$\begin{cases} 2(x - 1)(y - 2) - 2(x + y) = 36, \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 40, \end{cases}$$

rồi cộng theo vế được :

$$[(x - 1) + (y - 2)]^2 - 2(x + y) = 76$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 3)^2 - 2(x + y) = 76$$

và ta tính được $x + y$.

14. a) $x = a, y = b$; $x = -b, y = -a$.

b), d), e) đặt $x + y = u, xy = v$.

c) Đặt $x - y = u, xy = v$.

15. Biến đổi thành

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = 14, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \pm \sqrt{14}xy, \\ 3(x + y) = xy \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = (\pm \sqrt{14} + 2)xy, \\ 3(x + y) = xy. \end{cases} \text{ rồi tính } x + y.$$

b) Cộng theo vế, tính $2x, 2y, 2z$ rồi nhân theo vế 3 đẳng thức tìm được.

c) Đặt $\frac{x+y}{x-y} = t, x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = -5, y_2 = -1$.

d) $x_1 = -1, y_1 = -2$; $x_2 = 2, y_2 = 1$.

e) $x_1 = 2, y_1 = 3$; $x_2 = 3, y_2 = 2$.

f) Có thể thay $y = \frac{3}{x}$ vào phương trình đầu.

16. a) $a \neq 0$: vô nghiệm, $a = 0$: $x_1 = y_1 = 1$.

b) $1 = (x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \leq 2a$.

Nếu $a < \frac{1}{2}$ thì hệ vô nghiệm.

$a = \frac{1}{2}$ ta có 1 nghiệm $x = y = \frac{1}{2}$.

$a > \frac{1}{2}$ ta biến đổi tiếp được $\begin{cases} x + y = 1 \\ -2xy < a - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ -2x(1 - x) - a + 1 < 0 \end{cases}$$

Ta được 1 bpt bậc 2 để xác định x, y .

c) Nếu $a^2 < 2$: vô nghiệm,

Nếu $a^2 \geq 4$: hệ vô định,

$$2 \leq a^2 < 4 : \text{ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2|x||y| \geq \sqrt{8 - 2a^2} \end{cases}$$

d) Nếu $a \neq 0$, $x_1 = \frac{3a}{2}$, $y_1 = \frac{9a}{2}$.

$$x_2 = \frac{3a}{4}; y_2 = -\frac{9a}{4}$$

Nếu $a = 0$ hệ vô định : $x = y = c, \forall c$.

e) Lấy nghịch đảo các phương trình rồi chia tử số cho mẫu số, cộng theo vế các phương trình nhận được.

17. a) Đặt $x^3 = u, \sqrt{y} = v$.

b) $x = 2, y = 1$.

c) Đặt $\sqrt{x} = u, y^5 = v$.

18. Dựa vào định lý Viet cho phương trình bậc 3 ta có thể chứng minh được rằng (x, y, z) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + xz + yz = b \\ xyz = c \end{cases} \quad (1)$$

khi và chỉ khi x, y, z là các nghiệm số của phương trình bậc 3 : $t^3 - at^2 + bt - c = 0. (*)$

Hoán vị các nghiệm của (*) ta được tất cả các nghiệm của hệ đối xứng trên.

a) Để giải hệ này ta tìm nghiệm của phương trình bậc 3

$$t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0,$$

nghiệm là : $t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = -2$.

Hoán vị các số này ta được 6 nghiệm của hệ là $(1, -1, -2), (1, -2, -1), (-1, 1, -2), (-1, -2, 1), (-2, 1, -1), (-2, -1, 1)$.

b) Để đưa hệ đã cho về dạng (1) ta tính

$$xy + yz + xz ?$$

Ta có $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow xy + yz + xz = \frac{2^2 - 6}{2} = -1 \text{ và ta được hệ}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + yz + xz = -1, \\ xyz = -2, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ta giải phương trình bậc 3 : $t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0$ được $t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = 2$; hoán vị các số này ta được 6 bộ ba nhưng để ý điều kiện $x > 0$ ta được 4 nghiệm sau :

$$(1, -1, 2), (1, 2, -1), (2, 1, -1), (2, -1, 1).$$

c) $(-1, -2, 1), (-2, -1, 1)$.

$$19. m = \frac{1}{4}.$$

20. Khử xy từ hệ đã cho :

$$a = \pm 1, a = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

CHƯƠNG II

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

§1. Các phương pháp giải các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối

Theo định nghĩa $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0, \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$

Để giải các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối ta phải tìm cách khử dấu trị tuyệt đối bằng các phương pháp khác nhau

1^o) Phương pháp chia khoảng

Người ta xét dấu các biểu thức chứa dưới dấu trị tuyệt đối và chia trục số thành những khoảng sao cho trong khoảng đó các biểu thức dưới dấu trị tuyệt đối chỉ nhận dấu xác định, do đó có thể bỏ dấu trị tuyệt đối.

2^o) Phương pháp lũy thừa hai vế

Nếu 2 vế của một phương trình (bất phương trình) đều dương ta có thể bình phương chúng và được một phương trình mới tương đương (bất phương trình mới tương đương cùng chiều) với phương trình (bất phương trình) đã cho. Ta có các phép biến đổi tương đương sau đây :

Phương trình $|f(x)| = |g(x)|$ tương đương với $f^2(x) = g^2(x)$
ta viết $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) ; \quad (01)$

$$|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x) ; \quad (02)$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) > g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (03)$$
$$\begin{cases} g(x) < 0 \\ x \in S \end{cases}$$

trong đó S là miền xác định chung của $f(x)$ và $g(x)$;

$$f(x) = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) = g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (04)$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) < g^2(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (05)$$

Phương pháp này thường dùng khi 2 vế của pt (bpt) là bậc nhất.

3^o) Dùng định nghĩa ta dễ dàng chứng minh được các phép biến đổi quan trọng để khử dấu trị tuyệt đối sau đây là tương đương :

$$f(x) = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \pm f(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad (06)$$

$$\begin{aligned} |f(x)| = |g(x)| &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 0 \end{aligned} \quad (07)$$

$$|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -g(x) < f(x) < g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \quad (08)$$

$$|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0 \quad (09)$$

$$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases} \quad (10)$$

§2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Giải phương trình sau : $|x - 1| + |x - 2| = 3. (I)$

Giải : Ta dùng phương pháp chia khoảng

a) Xét $x < 1$. Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 1 - x + 2 - x = 3 \Leftrightarrow -2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ thỏa mãn } x < 1 \text{ nên là nghiệm của (1).}$$

b) Xét $1 \leq x \leq 2$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 + 2 - x = 3$$

$\Leftrightarrow 1 = 3$ vô lý, vậy pt (1) vô nghiệm trên khoảng $[1 ; 2]$.

c) Xét $x > 2$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x - 1 + x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 3 > 2 \text{ nên } x = 3 \text{ là nghiệm của (1).}$$

Tóm lại pt đã cho có 2 nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình :

$$|3|x - 2| - 3| = 3. \quad (1)$$

Giải : Dùng phép biến đổi (06) ta có :

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \begin{cases} 3|x - 2| - 3 = 3 \\ 3|x - 2| - 3 = -3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3|x - 2| = 6 \\ 3|x - 2| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 2| = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \pm 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \\ x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy pt đã cho có 3 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình

$$|x^2 - 2x| < x. \quad (1)$$

Giải : Theo phép biến đổi (08) ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < x \\ x^2 - 2x > -x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x < 0 \\ x^2 - x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 3) < 0 \\ x(x - 1) > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $1 < x < 3$.

Ví dụ 4. Giải bpt sau

$$|x - 1| < 2|x + 1| \quad (1)$$

Giải : Hai vế của (1) đều ≥ 0 và đều là bậc nhất ta có thể áp dụng biến đổi (01), bình phương 2 vế của (1) ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x - 1)^2 < 4(x + 1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 4x^2 + 8x + 4 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < -3 \text{ hoặc } x > -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Chú ý : Ta cũng có thể dùng phương pháp chia khoảng hoặc áp dụng (09) :

$$\begin{aligned} &(x - 1 - 2x - 2)(x - 1 + 2x + 2) < 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 3)(3x + 1) > 0. \end{aligned}$$

$$\text{Ví dụ 5. Giải hệ bpt } \begin{cases} |x^2 - 4x| < 5 & (1) \\ |x + 1| \leq 3. & (2) \end{cases}$$

Giải : Áp dụng phép biến đổi (08), hệ đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 - 4x < 5 \\ x^2 - 4x > -5 \\ -3 \leq x + 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0 \\ x^2 - 4x + 5 > 0 \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 5 \\ -\infty < x < +\infty \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq 2 \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ là $-1 < x \leq 2$.

Chú ý : Ở đây cũng có thể dùng phương pháp chia khoảng cho hệ hoặc biến đổi (02) cho bpt (2).

Ví dụ 6. Giải hệ phương trình 2 ẩn số :

$$\begin{cases} y - |x| - 1 = 0 & (1) \\ y - 2x + 1 = 0. & (2) \end{cases}$$

Giải : Xét $x \geq 0$ khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Xét $x < 0$ khi đó hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2x - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ nhưng nghiệm này không thích}$$

hợp vì $x = \frac{2}{3} > 0$.

Tóm lại hệ có 1 nghiệm : $x = 2, y = 3$.

Ví dụ 7. Giải hệ bpt

$$\begin{cases} |x^2 - x| \geq 2 & (1) \\ |x + 1| < 10 & (2) \\ |x^2 - 2x| > x - 2. & (3) \end{cases}$$

Giải : Ta giải riêng từng bất phương trình :

$$|x^2 - x| \geq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x \geq 2 \\ x^2 - x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 2$$

vì bpt $x^2 - x + 2 \leq 0$ vô nghiệm.

$$|x + 1| < 10 \Leftrightarrow -10 < x + 1 < 10$$

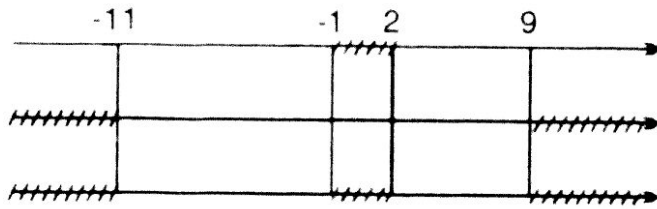
$$\Leftrightarrow -11 < x < 9.$$

$$|x^2 - 2x| > x - 2 \Leftrightarrow |x| |x - 2| > x - 2. \quad (3')$$

Với $x < 2$ vế phải của (3') âm nên nghiệm đúng (3').

Với $x > 2$ ta có $x(x - 2) > x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 1) > 0$ đúng với $x > 2$, vậy (3) có nghiệm là $x \neq 2$. Do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 2 \\ -11 < x < 9 \\ x \neq 2. \end{cases}$$



Hình 7

Ta biểu diễn lên trục số và được nghiệm của hệ :

$$\begin{aligned} -11 < x \leq -1, \\ 2 < x \leq 9. \end{aligned}$$

Ví dụ 8. Giải hệ

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1, & (1) \\ |x + y| = 1. & (2) \end{cases}$$

Giải : Từ (1) suy ra $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, kết hợp với (2) ta có x và y cùng dấu.

Ta xét 2 trường hợp :

a) $x \leq 0$, $y \leq 0$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} -x - y = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = -1.$$

Đặt $x = a$, $-1 \leq a \leq 0 \Rightarrow y = -1 - a$.

b) $x \geq 0$, $y \geq 0$, hệ có dạng

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1.$$

Đặt $x = b$, $0 \leq b \leq 1 \Rightarrow y = 1 - b$.

Tóm lại hệ có vô số nghiệm dạng

$(a ; -1 - a)$, $(b, 1 - b)$, trong đó $-1 \leq a \leq 0$, $0 \leq b \leq 1$.

Ví dụ 9. Giải hệ

$$\begin{cases} x + y = 2, & (1) \\ |2x - 3y| = 1. & (2) \end{cases}$$

Giải : Bình phương 2 vế của (2) ta được

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = 1. \quad (2')$$

Thay $y = 2 - x$ vào (2') ta có

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x(2 - x) + 9(2 - x)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 25x^2 - 60x + 35 &= 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 12x + 7 = 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \text{ hoặc } x = \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1,$$

$$x = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}, \text{ và hệ có 2 nghiệm } x_1 = 1, y_1 = 1;$$

$$x_2 = \frac{7}{5}, y_2 = \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 10. Giải bpt

$$|1 - \log_{1987}x| + |\log_{1987}x - 3| > 4. \quad (1)$$

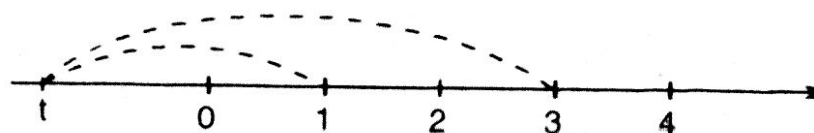
Giải : Điều kiện : $x > 0$.

Đặt $\log_{1987}x = t$.

Bất phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} |1 - t| + |t - 3| &> 4 \\ \Leftrightarrow |t - 1| + |t - 3| &> 4 \end{aligned} \quad (1')$$

Ta có thể giải (1') bằng phương pháp chia khoảng hoặc dựa vào biểu diễn hình học



Hình 8

$|t - 1|$ là khoảng cách từ t đến 1,

$|t - 3|$ là khoảng cách từ t đến 3.

Vế trái của (1') là tổng 2 khoảng cách này, do vậy (1') thỏa mãn với $t < 0$ hoặc $t > 4$

$$\text{Ta có : } \log_{1987}x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1,$$

$$\log_{1987}x > 4 \Leftrightarrow x > 1987^4.$$

$$\text{Đáp số : } 0 < x < 1, x > 1987^4.$$

$$\text{Ví dụ 11. Giải : } \lg|x - 1| + |\lg(x + 2)| = 1. \quad (1)$$

$$\text{Giải : Điều kiện } \begin{cases} x \neq 1 \\ x > -2 \end{cases}$$

Ta dùng phương pháp chia khoảng :

a) Xét $-2 < x < -1$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \lg(1 - x) - \lg(x + 2) = 1 \Leftrightarrow \lg \frac{1 - x}{x + 2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - x}{x + 2} = 10 \Leftrightarrow x = -\frac{19}{11}, \text{ nghiệm này thích hợp.}$$

b) Xét $-1 \leq x < 1$:

$$(1) \Leftrightarrow \lg(1 - x) + \lg(x + 2) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lg[(1 - x)(x + 2)] = 1 \Leftrightarrow (1 - x)(x + 2) = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 8 = 0 : \text{ vô nghiệm.}$$

c) Xét $x > 1$

$$(1) \Leftrightarrow \lg(x - 1) + \lg(x + 2) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 10 \Leftrightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = -4, \text{ nhưng } x = -4 \text{ không thích hợp.}$$

$$\text{Tóm lại pt có 2 nghiệm } x_1 = -\frac{19}{11}, x_2 = 3.$$

Ví dụ 12. Giải bpt

$$||x - 4| - 2| > x. \quad (1)$$

Giải : Ta nhận thấy $x \leq 0$ là nghiệm của (1). Bây giờ xét $x > 0$. Theo (010) bpt đã cho tương đương với

$$\begin{cases} |x - 4| - 2 > x \\ |x - 4| - 2 < -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 4| > x + 2 \\ |x - 4| < 2 - x \end{cases} \quad (3)$$

$x > 0$ hai vế của (3) dương nên

$$(3) \Leftrightarrow (x - 4)^2 > (x + 2)^2 \Leftrightarrow 12x < 12 \Leftrightarrow 0 < x < 1 ;$$

$$|x - 4| < 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ 4 - x < 2 - x \end{cases}$$

vô lý nên (4) vô nghiệm

Vậy bpt (1) có nghiệm là

$$-\infty < x < 1.$$

Ví dụ 13. Xác định m để pt sau có nghiệm duy nhất

$$|x| + |1 - x| = m. \quad (1)$$

Giải : Ví dụ này có thể giải bằng phương pháp chia khoảng. Nhưng ở đây ta giải theo cách khác. Chú ý rằng nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $1 - x_0$ cũng là nghiệm của (1), do đó (1) có nghiệm duy nhất chỉ khi

$$1 - x_0 = x_0 \text{ hay } x_0 = \frac{1}{2}.$$

Thay $x = \frac{1}{2}$ vào (1) ta có $m = 1$.

Với $m = 1$ (1) trở thành

$$|x| + |1 - x| = 1 \quad (2)$$

Ta thấy (2) có ít nhất 3 nghiệm $x = 0, x = 1, x = \frac{1}{2}$. Vậy không tồn tại m để (1) có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 14. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} |x - m| \leq m, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} |x - 1 + m| \leq 2m. \end{cases} \quad (2)$$

Giải : Ta nhận thấy nếu $m \leq 0$ thì hệ vô nghiệm. Xét $m > 0$, khi đó ta có thể bình phương 2 vế của (1) và (2) để được

$$\begin{cases} (x - m)^2 \leq m^2 \\ (x - 1 + m)^2 \leq (2m)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 2m) \leq 0 \\ (x + 3m - 1)(x - 1 - m) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2m \\ 1 - 3m \leq x \leq 1 + m. \end{cases}$$

Hệ có 1 nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$2m = 1 - 3m, \text{ tức } m = \frac{1}{5}.$$

hoặc $1 + m = 0$, tức $m = -1$.

nhưng giá trị này không thích hợp vì m phải dương.

Đáp số : Với $m = \frac{1}{5}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 15. Giải và biện luận :

$$x|x - 4| = m. \quad (1)$$

Giải a) Với $m < 0 \Rightarrow x < 0$ nên $x - 4 < 0$ và

$$(1) \Leftrightarrow x(4 - x) = m \Leftrightarrow$$

$x^2 - 4x + m = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - m}$, nhưng $x < 0$ nên chỉ có $x = 2 - \sqrt{4 - m}$ là thích hợp.

$$b) m = 0 \quad x|x - 4| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = 4.$$

c) Nếu $m > 0 \Rightarrow x > 0$.

$\alpha)$ Xét $0 < x < 4$, khi đó $(1) \Leftrightarrow x(4 - x) = m$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0. \quad (2)$$

$$\text{Với } 0 < m \leq 4 \Rightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - m}$$

cả 2 nghiệm này đều thích hợp với điều kiện $0 < x < 4$.

Với $m > 4$ thì (2) vô nghiệm.

$\beta)$ Xét $x \geq 4$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x(x - 4) = m \Leftrightarrow x^2 - 4x - m = 0$$

phương trình này có 1 nghiệm dương vì

$$x_1 x_2 = -m < 0,$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + m}; \text{ chỉ có } x = 2 + \sqrt{4 + m} > 4 \text{ là thích hợp.}$$

Tóm lại nếu $m < 0$ (1) có 1 nghiệm $x = 2 - \sqrt{4 - m}$;

nếu $m = 0$ (1) có 2 nghiệm $x = 0, x = 4$;

nếu $0 < m < 4$ (1) có 3 nghiệm

$$2 \pm \sqrt{4 - m}, 2 + \sqrt{4 + m};$$

nếu $m = 4$ (1) có 2 nghiệm 2 và $2 + 2\sqrt{2}$;

nếu $m > 4$ thì (1) có 1 nghiệm $2 + \sqrt{4 + m}$.

Ví dụ 16. Giải và biện luận :

$$|x^2 - 2mx + 1 - m| = |x^2 + mx + 1 + 2m|. \quad (1)$$

Giải : Ở đây nếu dùng phương pháp chia khoảng sẽ rất phức tạp, nên ta sẽ dựa vào phép biến đổi (07) để giải :

$$|f| = |g| \Leftrightarrow (f + g)(f - g) = 0.$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (3mx + 3m)(2x^2 - mx + 2 + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m(x + 1)(2x^2 - mx + 2 + m) = 0. \quad (1')$$

Nếu $m = 0$ thì $\forall x$ là nghiệm

$$\text{Nếu } m \neq 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \text{ hay } x = -1, \\ 2x^2 - mx + 2 + m = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ta xét } 2x^2 - mx + 2 + m = 0. \quad (2)$$

$$\Delta = m^2 - 8(2 + m) = m^2 - 8m - 16.$$

Nếu $4 - 4\sqrt{2} < m < 4 + 4\sqrt{2}$, $\Delta < 0$ phương trình (2) vô nghiệm.

Nếu $m < 4 - 4\sqrt{2}$ hoặc $m > 4 + 4\sqrt{2}$ thì (2) có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 16}}{4}$$

Tóm lại : nếu $m = 0$ thì $\forall x$ là nghiệm.

Nếu $m \neq 0$ và $4 - 4\sqrt{2} < m < 4 + 4\sqrt{2}$ phương trình có 1 nghiệm $x = -1$.

Nếu $m < 4 - 4\sqrt{2}$ hoặc $m > 4 + 4\sqrt{2}$ (1) có 3 nghiệm :

$$x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 16}}{4}, \quad x_3 = -1.$$

Ví dụ 17. Với những giá trị nào của m thì phương trình sau có ít nhất 4 nghiệm nguyên :

$$m^3 + m^2|x + m| + |m^2x + 1| = 1 ? \quad (1)$$

Giải : a) Với $m = 0$ (1) nghiệm đúng với mọi x trong đó có tất cả các số nguyên.

b) Xét $m \neq 0$.

Ta biến đổi (1) như sau :

$$\begin{aligned} m^2|m + x| + |m^2x + 1| &= m^2x + 1 - m^3 - m^2x \\ \Leftrightarrow |m^2x + 1| + |m^2(m + x)| &= m^2x + 1 - m^2(m + x). \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} m^2(m + x) = u \\ m^2x + 1 = v. \end{cases}$$

Ta có $|v| + |u| = v - u$ điều này xảy ra khi và chỉ khi $v \geq 0, u \leq 0$.

Nên phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} m^2x + 1 \geq 0 \\ m^2(m + x) \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Vì } m \neq 0 \text{ nên ta có } \begin{cases} x \geq -\frac{1}{m^2} \\ x \leq -m \end{cases} \quad (3)$$

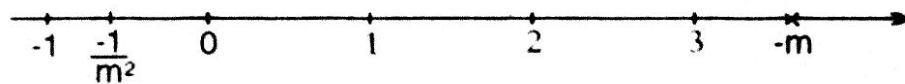
(2) hay (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$-\frac{1}{m^2} \leq -m \text{ hay } m^3 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Để pt (1) có ít nhất 4 nghiệm thì khoảng $[-1/m^2, -m]$ phải chứa ít nhất 4 số nguyên.

Ta xét các khả năng sau đây :

a) $m < -1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{m^2} < 0,$

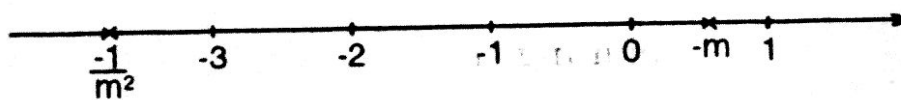


Hình 9

khi đó cần có $-m \geq 3 \Rightarrow m \leq -3.$

b) $m = -1$ thì khoảng $[-\frac{1}{m^2}, -m]$ là $[-1, 1]$ chỉ chứa 3 số nguyên.

c) $-1 < m < 0 \Rightarrow 0 < -m < 1,$



Hình 10

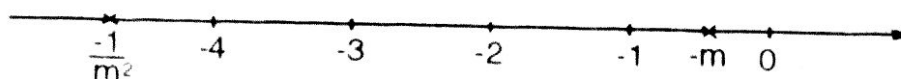
khi đó để thỏa mãn bài toán cần có

$$-\frac{1}{m^2} \leq -3 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < m < 0.$$

d) $0 < m < 1 \Rightarrow -1 < -m < 0.$

Cần có $-\frac{1}{m^2} \leq -4 \Rightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}.$

e) $m = 1$ lúc đó $[-\frac{1}{m^2}, -m]$ là 1 điểm -1.



Hình 11

Kết luận

$$m \leq -3 \text{ hoặc } -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 18. Giải bpt

$$|x + 2| + |x - 2| \geq 2(x^3 - 1). \quad (1)$$

Giải : a) Xét $x \leq 1$, khi đó $x^3 - 1 \leq 0$ vế trái ≥ 0 nên nghiệm đúng (1).

b) Xét $1 < x \leq 2$ bpt đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x + 2 + 2 - x &\geq 2(x^3 - 1) \Leftrightarrow 2 \geq x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 < x \leq \sqrt[3]{3}. \end{aligned}$$

c) Xét $2 < x$, khi đó

$$(1) \Leftrightarrow x + 2 + x - 2 \geq 2(x^3 - 1)$$

$$\Leftrightarrow x \geq x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x + x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) + (x - 1) \leq 0 \text{ vô}$$

nghiệm. Tóm lại $x \leq \sqrt[3]{3}$.

Ví dụ 19. Tìm a để phương trình sau đây có nghiệm duy nhất :

$$3|x| + 2ax = 3a - 1. \quad (1)$$

Giải : a) Xét $x \geq 0$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow 3x + 2ax = 3a - 1 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x(3 + 2a) = 3a - 1$$

Nếu $a = -\frac{3}{2}$ thì (2) vô nghiệm.

Nếu $a \neq -\frac{3}{2}$ thì (2) có nghiệm $x_1 = \frac{3a - 1}{3 + 2a}$.

x_1 sẽ là nghiệm của (1) nếu $\frac{3a-1}{3+2a} \geq 0$.

b) Xét $x \leq 0$, khi đó (1) có dạng

$$-3x + 2ax = 3a - 1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x(2a - 3) = 3a - 1.$$

Nếu $a = \frac{3}{2}$ thì (3) vô nghiệm.

Nếu $a \neq \frac{3}{2}$ thì (3) có nghiệm $x_2 = \frac{3a-1}{2a-3}$.

x_2 sẽ là nghiệm của (1) nếu $x_2 = \frac{3a-1}{2a-3} \leq 0$.

Như vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x_1 \geq 0, x_2 > 0$ hoặc $x_1 < 0, x_2 \leq 0$, tức là $x_1 x_2 \geq 0$

$$\text{hay } \frac{3a-1}{3+2a} \cdot \frac{3a-1}{2a-3} \geq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}, a > \frac{3}{2} \text{ hoặc } a < -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Đáp số : } a = \frac{1}{3}; |a| > \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 20. Giải phương trình

$$|x^2 - 5x + 5| = -2x^2 + 10x - 11. \quad (1)$$

Giải : Ta có thể dùng phương pháp chia khoảng. Nhưng ở đây biến đổi theo cách khác sẽ gọn hơn. Ta viết (1) dưới dạng sau :

$$|x^2 - 5x + 5| = -2(x^2 - 5x + 5) - 1 \quad (2)$$

Đặt $y = x^2 - 5x + 5$ ta có

$$|y| = -2y - 1; \quad (2')$$

như vậy để y là nghiệm của (2') cần có $y < 0$ và do vậy $|y| = -y$
 $\Rightarrow -y = -2y - 1 \Rightarrow y = -1,$

thay vào : $x^2 - 5x + 5 = -1 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = 3.$$

Ví dụ 21. Với giá trị nào của m thì giá trị lớn nhất của hàm số

$$f(x) = 4x - x^2 + |x - m| \text{ nhỏ hơn } 4 ? \quad (1)$$

Giải : $\max f(x) < 4$ khi và chỉ khi

$$\forall x$$

$$f(x) < 4 \text{ với mọi } x$$

$$\text{hay } 4x - x^2 + |x - m| < 4, \forall x \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow |x - m| < x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2, \forall x.$$

Theo (08) ta có

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 + m > 0, \forall x \\ x^2 - 3x + 4 - m > 0, \forall x. \end{cases} \quad (3)$$

Để $x^2 - 5x + 4 + m > 0, \forall x$ thì

$$\Delta_1 = 25 - 4(4 + m) = 9 - 4m < 0 \Rightarrow m > \frac{9}{4}.$$

Để $x^2 - 3x + 4 - m > 0, \forall x$ thì

$$\Delta_2 = 9 - 4(4 - m) < 0 \Leftrightarrow 4m - 7 < 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{7}{4}. \text{ Như vậy không thể tìm được } m \text{ sao cho } \Delta_1, \Delta_2$$

đồng thời âm, nên không tồn tại m để hệ (2) đúng với mọi x , tức là không có m thỏa mãn điều kiện bài toán.

Chú ý : Có thể giải (2) bằng cách xét $x \geq m$ và $x < m$.

Ví dụ 22. Xác định m sao cho bất phương trình

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - mxy + y - 25x^2 \quad (1)$$

$$\text{nghiệm đúng với mọi } x, y \text{ thỏa mãn } |x| = |y|. \quad (2)$$

Giải : $|x| = |y| \Leftrightarrow y = \pm x$.

Thay $y = \pm x$ vào (1) ta có

$$\begin{cases} 25x^2 + \frac{1}{100} \geq x - mx^2 + x - 25x^2, \forall x \\ 25x^2 + \frac{1}{100} \geq x + mx^2 + x - 25x^2, \forall x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (50 + m)x^2 - 2x + \frac{1}{100} \geq 0, \forall x & (3) \\ (50 - m)x^2 + \frac{1}{100} \geq 0, \forall x. & (4) \end{cases}$$

Nếu $m = 50$ thì (3) $\Leftrightarrow 100x^2 - 2x + \frac{1}{100} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(10x - \frac{1}{10}\right)^2 \geq 0 \text{ đúng } \forall x.$$

(4) cũng đúng với mọi x , vậy $m = 50$ thỏa mãn bài toán.

Nếu $m = -50$ thì (3) không thỏa mãn với mọi x .

Nếu $m \neq \pm 50$ khi đó (3) đúng với mọi x chỉ khi

$$\Delta' = 1 - \frac{1}{2} - \frac{m}{100} < 0 \text{ hay } m > 50 \text{ nhưng khi đó } 50 - m < 0$$

và (4) không thể nghiệm đúng với mọi x . Tóm lại chỉ có $m = 50$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Nhận xét : Các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối nói chung có thể giải theo 2 hay 3 phương pháp khác nhau tùy theo việc chọn phương pháp khử dấu giá trị tuyệt đối. Nhưng ở đây chúng ta chỉ minh họa cụ thể 1 phương pháp cho mỗi ví dụ.

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Giải các phương trình sau :

- a) $|3x - 2| + x = 11$;
- b) $|x| - |x - 2| = 2$;
- c) $|x - 3| + 2|x - 1| = 4$;
- d) $3|x^2 - 4x + 2| = 5x + 16$.

2. Giải các bất phương trình sau :

- a) $2|x + 1| > x + 4$;
- b) $|x^2 + x| - 5 < 0$;
- c) $(|x - 1| - 3)(|x + 2| - 5) < 0$;
- d) $\frac{|x + 3| + x}{x + 2} > 1$.

3. Giải các phương trình và bất phương trình :

- a) $|x^2 - 3x - 5| = x^2 + 4x + 4$;
- b) $|x^2 + x| = |5x^2 + 7x - 1|$;
- c) $x + 6 > |x^2 + 6x - 7|$;
- d) $x^2 - 5x + 6 = |x - 5|$;
- e) $|x^2 - 3x + 2| > |x^2 + 3x + 2|$;
- f) $||x^2 + 4x + 3| + 2x + 3| = |x^2 + 6x - 1|$.

4. Giải các hệ phương trình và bất phương trình :

- a) $\begin{cases} |x + 1| + |x - 4| > 7, \\ |x - 2| \leq |x + 4| \end{cases}$;
- b) $\begin{cases} x^2 - |5x + 8| > 0, \\ x^2 + 4 \geq |3x + 2| - 7x \end{cases}$;
- c) $\begin{cases} |x^3 + 1| \geq 1 + x, \\ \left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 4. \end{cases}$

5. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2 ; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} |x - y| = 12y - 11, \\ y + 1 = 2x ; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} |y| - 2x + 1 = 0, \\ y - |x| - 1 = 0. \end{cases}$$

6. Giải và biện luận :

$$\text{a) } |x - a| + |x + a| < b ;$$

$$\text{b) } |x^2 - 2x + a| \leq |x^2 - 3x + a| ;$$

$$\text{c) } |x - a| \leq |x^2 + a| ;$$

$$\text{d) } x^4 - x^2 + m < |x^2 - 9| ;$$

$$\text{e) } m|x + 5| < |x + 1| ;$$

$$\text{f) } m|x^2 - 3x + 1| = |x - m| ;$$

$$\text{g) } |x^2 + mx + 3| < |x^2 + x - 1| .$$

7. Tìm m để các phương trình và hệ sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\text{a) } |x| + m\sqrt{1 - x^2} = 1 ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2} + |y| = m, \\ \sqrt{y^2 + 2} + |x| = 2m - \sqrt{2} ; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(m - 1)x + m(m - 2) = 0 ; \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leq 1, \\ |x - y| + m = 0 ; \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} mx + (m - 1)y = 2 + 4m, \\ 3|x| + 2y = m - 5 ; \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + 2(m - 1)y = m - 4, \\ 2|x + 1| + my = 2. \end{cases}$$

8. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}} + 2x^2 = 1$;

b) $|x - 1|^{\lg^2 x - \lg x} = |x - 1|^3$;

c) $3^x + 1 - |3^x - 1| = 2\log_5 |6 - x|$;

d) $|1 + ||x - 3| - 5| - |x|| = |x + 2|$;

e) $|\lg(x + 2)| - |\lg(x + 3) - 1| = \lg 2$;

f) $\log_{1/2} |x| = \frac{1}{3} (|x - 2| + |x + 2|)$.

9. Xác định m sao cho các phương trình và bất phương trình sau có nghiệm :

a) $x^2 + |x + m| < 2$;

b) $x^2 + |x - m| < 1$;

c) $m|x - 1| + |x - 3| = ||x - 1| - |3 - x||$;

d) $x^2 + 2|x - m| + m^2 + m - 1 \leq 0$.

10. Tìm m sao cho bất đẳng thức

$$4x^2 + 4y^2 + mxy \geq x + y - \frac{1}{16}$$

đúng với mọi x, y thỏa mãn $|x| = |y|$.

11. Tìm m để phương trình sau có đúng 2 nghiệm phân biệt :

$$x^2 + 4x - 2|x - m| + 2 - m = 0.$$

12. Xác định m để phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$x|x + 2m| + 1 - m = 0.$$

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG II

1. a) $x_1 = \frac{9}{2}$, $x_2 = -\frac{13}{4}$.

- b) $x \geq 2$.
- c) Xét $x < 1$, $x > 3$, $1 \leq x \leq 3$.
- d) Chia khoảng.
- e) Đặt $|x - 1| = t$.
2. a) $|x| > 2$.
- b) Viết thành $-5 < x^2 + x < 5$.
- c) Dùng phương pháp chia khoảng.
- d) Chia khoảng, $-5 < x < -2$, $x > -1$.
3. a) Vế phải $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ dùng biến đổi

$$|f| = g \Leftrightarrow f = \pm g.$$

b) $|f| = |g| \Leftrightarrow (f - g)(f + g) = 0.$

c) Xét $x \leq -6$ bpt vô nghiệm

Với $x > -6$ ta có hệ

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 7 < x - 6, \\ x^2 + 6x - 7 > 6 - x. \end{cases}$$

d) Phương trình có nghiệm chỉ khi

$$x < 2 \text{ hoặc } x > 3.$$

Xét $x < 2$,

$$3 < x < 5,$$

$$x > 5 ;$$

hoặc xét $\begin{cases} x < 2, \\ x > 3, \end{cases} \begin{cases} x + 5 = x^2 - 5x + 6, \\ x + 5 = -(x^2 - 5x + 6). \end{cases}$

e) $|f| > |g| \Leftrightarrow (f - g)(f + g) > 0.$

f) $|f| = |g| \Leftrightarrow f = \pm g.$

4. a) $x > 5$.

b) $-5 - \sqrt{19} < x < \frac{5 - \sqrt{57}}{2}, x > \frac{5 + \sqrt{57}}{2}.$

$$c) x = 0, 1 \leq x \leq \frac{8}{5}, x \geq \frac{5}{2}.$$

$$5. a) (1, -1); \left(\frac{-11}{19}, \frac{23}{19} \right).$$

b) Thay $y = 2x - 1$ vào phương trình đầu ; nghiệm của hệ là $\left(\frac{24}{25}, \frac{23}{25} \right).$

c) Từ phương trình đầu $\Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$, từ phương trình thứ hai suy ra $y \geq 1$, nên có thể bỏ dấu trị tuyệt đối.

6. a) Nếu $b \leq 2|a|$ bpt vô nghiệm

$$b > 2|a| : x = \pm \frac{b}{2}.$$

$$b) |f| \leq |g| \Leftrightarrow (f - g)(f + g) \leq 0,$$

$$a \leq -\frac{5}{4} : x \leq 0, \frac{5}{2} \leq x \leq -2a ;$$

$$-\frac{5}{4} < a < 0 : x \leq 0, -2a \leq x \leq \frac{5}{2} ;$$

$$a \geq 0 : x \leq -2a, 0 \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

$$c) a < -1 : 0 < x < 1, x > \frac{-1 + \sqrt{1 - 8a}}{2},$$

$$x < \frac{-1 - \sqrt{1 - 8a}}{2};$$

$$-1 \leq a < \frac{1}{8} \Rightarrow 0 < x < \frac{-1 + \sqrt{1 - 8a}}{2}, x > 1,$$

$$x < (-1 - \sqrt{1 - 8a}) \frac{1}{2}.$$

d) Đặt $x^2 = t$.

e) Xét $m \leq 0$ và $m > 0$, bình phương 2 vế với $m > 0$.

f) Xét $m \leq 0$ và $m > 0$.

Với $m > 0$: $m(x^2 - 3x + 1) = \pm (x - m)$.

$$g) |f| < |g| \Leftrightarrow (f - g)(f + g) < 0.$$

7. a) Nếu x_0 là nghiệm thì $-x_0$ cũng là nghiệm.

$$\Rightarrow x_0 = 0, m = 1.$$

b) Nếu (x_0, y_0) là nghiệm thì $(-x_0, \pm y_0)$, $(x_0, \pm y_0)$ cũng là nghiệm $\Rightarrow m = \sqrt{2}$.

c) $m = 1, 3 \leq m \leq 4$.

d) Điều kiện có nghiệm $m < 0$.

$$\text{Viết } |x - y| = -m \Rightarrow y = x \pm m,$$

thay vào bất phương trình đầu ta được tuyến :

$$\begin{cases} x^2 + (x + m)^2 + 2x - 1 \leq 0, \\ x^2 + (x - m)^2 + 2x - 1 \leq 0. \end{cases}$$

Tính Δ_1, Δ_2 .

$$\text{Giả sử } \Delta_1(m^*) = 0, \Delta_2(m^{**}) = 0.$$

m sẽ thỏa mãn bài toán nếu :

$$\Delta_1(m) = 0, \Delta_2(m) < 0 ;$$

$$\text{hoặc : } \Delta_2(m) = 0, \Delta_1(m) < 0.$$

Đáp số : $m = -3$.

e) Xét $x \geq 0, x < 0$: $m = 7 \pm 4\sqrt{3}$.

$$f) \frac{2}{3} \leq m \leq 2.$$

$$8. a) 1 + 2x\sqrt{1 - x^2} = (x + \sqrt{1 - x^2})^2 ;$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$b) x = 2, x = 10^{-1}, x = 10^{-3}.$$

c) $x = 1, x = 11.$

d) $|f| = |g| \Rightarrow f = \pm g.$

e) $x = 2, x = -\frac{37}{19}.$

f) Điều kiện có nghiệm là $|x| < 1.$

Từ đó có thể bỏ dấu trị tuyệt đối và lấy dấu thích hợp.

9. a) *) Đặt $t = |x + m|$

*) hoặc biến đổi :

$$|x + m| < 2 - x^2 \Rightarrow x < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + m < 2 - x^2, \\ x + m > x^2 - 2 ; -\frac{9}{2} < m < 2. \end{cases}$$

c) $f = |g| \Leftrightarrow \begin{cases} g = \pm f \\ f \geq 0. \end{cases}$

d) Đặt $x - m = t$ hoặc xét $x \geq m$ và $x < m.$

10. Thay $y = \pm x$ vào bất phương trình ta được 1 hệ thỏa mãn $\forall x$ khi $m = 8.$

11. $m < -\frac{7}{3}, m > -2$

12. $m < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, m > 1.$

CHƯƠNG III

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ CHỨA CĂN THỨC

Khi giải các bài toán chứa căn thức, trước tiên phải đặt những điều kiện cho bài toán có nghĩa, rồi thông thường phải

tìm cách tách căn thức và khử nó. Ở đây ta nhắc lại một số phép biến đổi tương đương quan trọng áp dụng cho trường hợp căn thức.

Giả sử k là số nguyên dương.

$$1) \sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^{2k}(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Chú ý ở đây không cần thiết đặt điều kiện $f(x) \geq 0$ vì nó là hệ quả của đẳng thức $f(x) = g^{2k}(x)$.

$$2) \sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x).$$

$$3) \sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2k}(x) \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$4) \sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x).$$

$$5) \sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$6) \sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

§1. Phương trình và bất phương trình vô tỉ

1) Phương pháp sử dụng các phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = 0. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x. \quad (2)$$

Với điều kiện (2) thì phương trình đã cho tương đương với phương trình $\sqrt{x(x+2)} - 4 + 2 + x = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x} = 2 - x. \quad (3)$$

Nếu $x \geq 2$ thì (3) vô nghiệm.

Xét $0 \leq x < 2$, khi đó

$$(3) \Leftrightarrow x^2 + 2x = (2 - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Đáp số : Phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{2}{3}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình :

$$\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 2. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \\ x - \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x - \sqrt{1-x} \geq 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Ta biến đổi như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 2 - \sqrt{x} \quad (3)$$

Vì $x \leq 1$ nên $2 - \sqrt{x} > 0$ ta có thể bình phương 2 vế của (3).

$$\begin{aligned} (3) \quad &\Leftrightarrow x - \sqrt{1-x} = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-x} = 4(\sqrt{x} - 1). \end{aligned} \quad (4)$$

Vì $x \leq 1$ nên $\sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow$ vế phải của (4) ≤ 0 , còn vế trái $\sqrt{1-x} \geq 0$, vậy (4) xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{1-x} = 0 = 4(\sqrt{x} - 1) \Leftrightarrow x = 1$. Giá trị này thỏa mãn điều kiện (2) nên là nghiệm của pt đã cho.

Đáp số : $x = 1$.

Chú ý : Nếu chỉ dùng các phép biến đổi mà không để ý đến điều kiện tương đương thì phải thử lại nghiệm tìm được :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 2 - \sqrt{x} \\ &\Rightarrow x - \sqrt{1-x} = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ &\Rightarrow \sqrt{1-x} = 4\sqrt{x} - 4 \\ &\Rightarrow 1 - x = (4\sqrt{4} - 4)^2 \Rightarrow 32\sqrt{x} = 17x + 15 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(17\sqrt{x} - 15) = 0 \\ &\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{225}{289}. \end{aligned}$$

Khi thử lại ta loại $x = \frac{225}{289}$.

Ví dụ 3. Giải pt $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2. \quad (1)$

Giải : Phương trình (1) xác định với $\forall x$.

Lập phương 2 vế ta được :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow 12 - x + 3\sqrt[3]{(12-x)(14+x)} (\sqrt[3]{12-x} + \\ &+ \sqrt[3]{14+x}) + 14 + x = 8. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay $\sqrt[3]{12 - x} + \sqrt[3]{14 + x} = 2$ vào (2) ta có

$$3\sqrt[3]{168 - 2x - x^2} \cdot 2 + 26 = 8$$

$$\Leftrightarrow 168 - 2x - x^2 = -27$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 13, x_2 = -15.$$

Ví dụ 4. Giải bất phương trình : $2x - 5 < \sqrt{4x - x^2 - 3}$. (1)

Giải : Đặt điều kiện : $-x^2 - 3 + 4x \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3. \quad (2)$$

a) Xét $2x - 5 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$, (3)

khi đó vế trái âm vế phải không âm nên nghiệm đúng (1),
kết hợp với (2) ta có nghiệm

$$1 \leq x < \frac{5}{2} \quad (*)$$

b) Xét $2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$. Kết hợp (2) ta xét

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 3, \quad (4)$$

khi đó 2 vế của (1) đều dương, bình phương ta được

$$4x^2 - 20x + 25 < -x^2 + 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 24x + 28 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < \frac{14}{5}, \text{ kết hợp với (4)}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} \leq x < \frac{14}{5} \quad (**)$$

là nghiệm của (1). Từ (*) và (**) bpt (1) có nghiệm :

$$1 \leq x < \frac{14}{5}.$$

Ví dụ 5. Giải và biện luận bpt

$$(m + 1)\sqrt{2 - x} < 1. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện $2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2.$ (2)

a) Nếu $m \leq -1$, khi đó vế trái ≤ 0 , vế phải dương nên $\forall x \leq 2$ nghiệm đúng (1).

b) Nếu $m > -1$, 2 vế của (1) dương, bình phương ta được :

$$(m + 1)^2(2 - x) < 1$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 x > 2(m + 1)^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2(m + 1)^2 - 1}{(m + 1)^2} = 2 - \frac{1}{(m + 1)^2} < 2.$$

Nên nghiệm của (1) là

$$2 - \frac{1}{(m + 1)^2} < x \leq 2.$$

Tóm lại : Nếu $m \leq -1$, thì $x \leq 2$;

Nếu $m > -1$, thì $2 - \frac{1}{(m + 1)^2} < x \leq 2.$

Ví dụ 6. Giải và biện luận :

$$m\sqrt{x} - \sqrt{x + 2mx\sqrt{x^2 + m^2}} = 0. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0, \\ x + 2mx\sqrt{x^2 + m^2} \geq 0. \end{cases}$ (2)

Xét $m < 0$, khi đó $m\sqrt{x} \leq 0$, vế trái của (1) không dương nên (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \sqrt{x + 2mx\sqrt{x^2 + m^2}} = 0 \\ \sqrt{x} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Nếu $m = 0$ thì (1) có dạng

$$-\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Nếu $m > 0$ ta biến đổi (1) như sau :

$$m\sqrt{x} = \sqrt{x + 2mx\sqrt{x^2 + m^2}}. \quad (3)$$

2 vế của (3) không âm, bình phương ta được :

$$m^2x = x + 2mx\sqrt{x^2 + m^2} \Leftrightarrow x(m^2 - 1 - 2m\sqrt{x^2 + m^2}) = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc}$$

$$m^2 - 1 - 2m\sqrt{x^2 + m^2} = 0. \quad (4)$$

Ta có

$$(4) \Leftrightarrow m^2 - 1 = 2m\sqrt{x^2 + m^2} \quad (4')$$

(4') có nghiệm chỉ khi $m^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 1$.

Bình phương 2 vế của (4') ta có

$$m^4 - 2m^2 + 1 = 4m^2(x^2 + m^2) \\ \Leftrightarrow 3m^4 + 2m^2 - 1 + 4m^2x^2 = 0, \quad (5)$$

nhưng với $m^2 \geq 1$ vế trái của (5) dương nên (5) vô nghiệm.

Tóm lại pt đã cho có 1 nghiệm duy nhất

$$x = 0.$$

Ví dụ 7. Giải phương trình

$$\sqrt{7x - 13} - \sqrt{3x - 19} = \sqrt{5x - 27}.$$

Giải : Đặt điều kiện

$$\begin{cases} 7x - 13 \geq 0, \\ 3x - 19 \geq 0, \text{ hay } x \geq \frac{19}{3}, \\ 5x - 27 \geq 0, \end{cases}$$

Viết lại phương trình dưới dạng

$$\sqrt{7x - 13} = \sqrt{3x - 19} + \sqrt{5x - 27}.$$

Vì hai vế của phương trình đều không âm, ta có thể bình phương hai vế :

$$7x - 13 = 3x - 19 + 5x - 27 + 2\sqrt{(3x - 19)(5x - 27)},$$

$$\text{hay} \quad 33 - x = 2\sqrt{(3x - 19)(5x - 27)} \quad (1)$$

1) Nếu $33 - x < 0$, hay $x > 33$, thì phương trình vô nghiệm

2) Xét $\frac{19}{3} \leq x \leq 33$, thì cả hai vế của (1) đều không âm, bình phương hai vế ta được

$$1089 - 66x + x^2 = 60x^2 - 704x + 2052,$$

$$\text{hay} \quad 59x^2 - 638x + 963 = 0$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm $x_1 = 9$, $x_2 = \frac{107}{59}$, nghiệm $x_2 < \frac{19}{3}$ bị loại. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 9$.

Ví dụ 8. Giải phương trình

$$\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa : $x \geq \sqrt{3}$. Ta biến đổi vế trái của phương trình :

$$\begin{aligned} \frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} &= \frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})}{(\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})} \\ &= \frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})}{-\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự } \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} &= \\ &= \frac{(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}}) - (x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}}) = \sqrt{3}x.$$

Sau khi biến đổi ta được :

$$\sqrt{(x - \sqrt{3})^3} + \sqrt{(x + \sqrt{3})^3} = 3\sqrt{3x}.$$

Do hai vế đều ≥ 0 , ta bình phương hai vế :

$$(x - \sqrt{3})^3 + (x + \sqrt{3})^3 + 2\sqrt{(x^2 - 3)^3} = 27x,$$

hay

$$2\sqrt{(x^2 - 3)^3} = x(9 - 2x^2).$$

1) nếu $x(9 - 2x^2) < 0$,

hay $-\frac{3\sqrt{2}}{2} < x < 0$ hoặc $x > \frac{3\sqrt{2}}{2}$, thì phương trình vô nghiệm.

2) Xét $x(9 - 2x^2) \geq 0$, tức là $\sqrt{3} \leq x \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$, thì các vế của phương trình đều ≥ 0 , ta bình phương hai vế :

$$4(x^2 - 3)^3 = x^2(9 - 2x^2)^2$$

hay $27x^2 = 108$, từ đó $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ (nghiệm này bị loại vì không thỏa mãn điều kiện $x \geq \sqrt{3}$).

Kết luận : Phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$.

Ví dụ 9. Giải và biện luận bất phương trình

$$2x + 2\sqrt{a^2 + x^2} \leq \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}; a \neq 0.$$

Giải : Nhân hai vế của bất phương trình với $\sqrt{a^2 + x^2}$ ta thu được

$$2x\sqrt{a^2 + x^2} + 2(a^2 + x^2) < 5a^2,$$

$$\text{hay} \quad 2x\sqrt{a^2 + x^2} \leq 3a^2 - 2x^2. \quad (1)$$

1) Nếu $x \geq 0$ thì (1) có thể viết :

$$2\sqrt{x^2(a^2 + x^2)} \leq 3a^2 - 2x^2. \quad (2)$$

i) Nếu $x > \frac{\sqrt{6}}{2} |a|$ thì (2) vô nghiệm vì vế phải < 0 .

ii) Nếu $0 \leq x \leq \frac{\sqrt{6}}{2} |a|$ có thể bình phương hai vế của (2)

$$4x^2(a^2 + x^2) \leq (3a^2 - 2x^2)^2,$$

hay $16a^2x^2 \leq 9a^4,$

hay $0 \leq x \leq \frac{3}{4} |a|$ là nghiệm.

2) Xét trường hợp $x < 0$. Khi đó, nếu $3a^2 - 2x^2 \geq 0$, hay $-\frac{\sqrt{6}}{2} |a| \leq x < 0$, thì (1) luôn luôn nghiệm đúng.

Nếu $x < -\frac{\sqrt{6}}{2} |a|$ thì (1) tương đương với :

$$4x^2(a^2 + x^2) \geq (3a^2 - 2x^2)^2, \text{ hay } 16a^2x^2 \geq 9a^4, \text{ từ đó suy ra } |x| \geq \frac{3|a|}{4}, \text{ hay } x \leq -\frac{3|a|}{4}.$$

Kết hợp với điều kiện $x < -\frac{\sqrt{6}}{2} |a|$, ta được nghiệm

$$x < -\frac{\sqrt{6}}{2} |a|.$$

Tóm lại. $x \leq \frac{3}{4} |a|$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Nhận xét : Trường hợp 2), khi $x < 0$, ta có thể giải ngắn gọn hơn theo cách sau :

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2x\sqrt{a^2 + x^2} &= -2|x|\sqrt{a^2 + x^2} \leq -2|x| \cdot |x| = \\ &= -2x^2 \leq -2x^3 + 3a^2. \end{aligned}$$

Vậy (1) luôn luôn nghiệm đúng. Do vậy, mọi $x < 0$ là nghiệm.

Ví dụ 10. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 + 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 5x - 7} = 5.$$

Giải : Điều kiện để căn có nghĩa :

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x + 3 \geq 0, \\ 2x^2 + 5x - 7 \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình này ta được

$$x \leq -\frac{7}{2} \text{ hoặc } x \geq 1. \quad (1)$$

Nhận xét rằng ta luôn luôn có :

$$(2x^2 + 5x + 3) - (2x^2 + 5x - 7) = 10.$$

Do đó với những x thỏa mãn các điều kiện (1), ta có

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2x^2 + 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 5x - 7})(\sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \\ & \quad - \sqrt{2x^2 + 5x - 7}) = 10. \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình đã cho, ta được hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 5x + 3} + \sqrt{2x^2 + 5x - 7} = 5, \\ \sqrt{2x^2 + 5x + 3} - \sqrt{2x^2 + 5x - 7} = \frac{10}{5} = 2. \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng ta suy ra :

$$2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = 7, \text{ hay } 4(2x^2 + 5x + 3) = 49.$$

hay $8x^2 + 20x - 37 = 0,$

hay $x_1 = \frac{-5 - 3\sqrt{11}}{4}; x_2 = \frac{-5 + 3\sqrt{11}}{4}$

Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn các điều kiện (1).

Ví dụ 11. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}.$$

Giải : Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ ta được điều kiện $x \leq 1$ hoặc $x \geq 4$. (1)

Ta viết lại bất phương trình dưới dạng :

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)}. \quad (2)$$

1) Nếu $x \geq 4$ thì có thể giản ước hai vế cho $\sqrt{x-1}$:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}.$$

Các vế đều dương, ta bình phương hai vế :

$$x-2 + x-3 + 2\sqrt{(x-2)(x-3)} \geq 4(x-4),$$

hay
$$2\sqrt{(x-2)(x-3)} \geq 2x-11.$$

i) Nếu $4 \leq x \leq \frac{11}{2}$, thì vế phải không dương và bất phương trình luôn thỏa mãn, vậy $4 \leq x \leq \frac{11}{2}$ là một khoảng nghiệm.

ii) Nếu $x > \frac{11}{2}$, có thể bình phương hai vế

$$4(x^2 - 5x + 6) \geq 4x^2 - 44x + 121,$$

hay
$$24x \geq 97 \text{ hay } x \geq \frac{97}{24}. \text{ Vì } \frac{97}{24} < \frac{11}{2},$$

nên
$$x > \frac{11}{2} \text{ là nghiệm.}$$

2) Nếu $x \leq 1$. Ta viết (2) dưới dạng :

$$\sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} \geq 2\sqrt{(1-x)(4-x)},$$

hay
$$\sqrt{1-x} (\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} - 2\sqrt{4-x}) \geq 0. \quad (3)$$

i) $x = 1$ là nghiệm ;

ii) $x < 1$ thì (3) tương đương với

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}.$$

Do hai vế ≥ 0 ta có thể bình phương hai vế

$$2-x + 3-x + 2\sqrt{(2-x)(3-x)} \geq 4(4-x),$$

hay
$$2\sqrt{(2-x)(3-x)} \geq 11-2x.$$

Do $x < 1$, nên $-2x > -2$ và $11-2x > 11-2 = 9 > 0$,
nên có thể bình phương hai vế

$$4(6-5x+x^2) \geq 121-44x-4x^2,$$

hay
$$24x \geq 97$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{97}{24}, \text{ nghiệm này không thích hợp.}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$x_1 = 1 \text{ và mọi } x \geq 4.$$

2. *Phương pháp đặt ẩn số phụ.* Mục đích chính của việc đặt ẩn số phụ là nhằm đưa phương trình đang xét về một phương trình đơn giản hơn. Tuy nhiên ta cần phải biết chọn các ẩn số phụ một cách thích hợp, phù hợp với đặc thù của bài toán đang xét.

Ví dụ 12. Giải phương trình

$$3\sqrt[3]{x^2-3x+2} = 2x^2-6x+5.$$

Giải : Đặt $\sqrt[3]{x^2-3x+2} = t$, thì $x^2-3x = t^3-2$. (1)

Phương trình đã cho trở thành

$$3t = 2(t^3-2)+5, \text{ hay } 2t^3-3t+1=0.$$

Giải phương trình này, ta được các nghiệm :

$$t_1 = 1 ; t_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

1) Với $t_1 = 1$ ta có $x^2-3x = 1^3-2$, hay $x^2-3x+1=0$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2) Với $t_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$, ta có $x^2 - 3x = \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right)^3 - 2$,

hay $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{4}$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4 + 3\sqrt{3}}$$

3) Với $t_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$ ta có $x^2 - 3x = \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)^3 - 2$.

Phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm :

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} ; x_{3,4} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4 + 3\sqrt{3}}$$

Ví dụ 13. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 2}} = 2.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ x - \sqrt{x^2 - 1} \geq 0, \text{ suy ra } x \geq 1. \\ x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 0 ; \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1, (|x| \geq 1).$ (2)

Đặt

$$\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = t, \text{ thì } \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{t^2} ; t > 0.$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$t + \frac{1}{t^2} = 2$, hay $t^3 - 2t^2 + 1 = 0$. Phương trình này có các

nghiệm $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; $t_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (loại).

2) Với $t_1 = 1$, ta được $x - \sqrt{x^2 - 1} = 1$. Từ (2) ta được $x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = 1, \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = 1. \end{cases}$$

Cộng lại ta được nghiệm $x = 1$, thỏa mãn (1).

2) Với $t_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, thì $x - \sqrt{x^2 - 1} = t_2^4$.

Từ (2) suy ra $x + \sqrt{x^2 - 1} = t_2^{-4}$

$$\text{Vậy } \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - 1} = t_2^4, \\ x + \sqrt{x^2 - 1} = t_2^{-4}. \end{cases}$$

Cộng lại ta được nghiệm $x = \frac{1}{2} (t_2^4 + t_2^{-4})$, thỏa mãn (1).

Ví dụ 14. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + m \sqrt[3]{(x-a)^2} = (m+1) \sqrt[3]{x^2 - a^2}.$$

Giải : 1) Nếu $a = 0$ thì phương trình có dạng

$$\sqrt[3]{x^2} + m \sqrt[3]{x^2} = (m+1) \sqrt[3]{x^2}. \text{ Vậy mọi } x \text{ là nghiệm.}$$

2) Nếu $a \neq 0$, thì $x = a$ không là nghiệm của phương trình.

Chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt[3]{(x-a)^2}$ và đặt

$$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}} = t, \text{ ta được phương trình}$$

$$t^2 - (m+1)t + m = 0, \text{ hay}$$

$$t = 1 ; t = m.$$

i) Với $t = 1$, thì $\frac{x+a}{x-a} = 1$, hay $x+a = x-a$, phương trình này vô nghiệm.

ii) Với $t = m$, thì $\frac{x+a}{x-a} = m^3$, hay $x+a = m^3x - m^3a$,

hay $(m^3 - 1)x = (m^3 + 1)a$.

Nếu $m = 1$ thì phương trình vô nghiệm ;

Nếu $m \neq 1$ thì $x = \frac{m^3 + 1}{m^3 - 1} a$ là nghiệm.

Ví dụ 15. Giải phương trình

$$x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2-2x^2}.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa :

$$1 - x^2 \geq 0, \text{ hay } -1 \leq x \leq 1.$$

Đặt $x = \cos t$; $0 \leq t \leq \pi$.

Khi đó $\sqrt{1-x^2} = \sin t$ và phương trình đã cho có dạng :

$$\cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2} \cos t \sin t. \quad (2)$$

Đặt tiếp $\cos t + \sin t = y$, $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$;

ta được

$$\begin{cases} \cos^3 t + \sin^3 t = (\cos t + \sin t)^3 - 3 \cos t \sin t (\cos t + \sin t), \\ \cos t \sin t = \frac{1}{2} [-1 + (\cos t + \sin t)^2] ; \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \cos t \sin t = \frac{1}{2} (y^2 - 1), \\ \cos^3 t + \sin^3 t = y^3 - \frac{3}{2} y(y^2 - 1) = -\frac{y^3}{2} + \frac{3}{2} y. \end{cases}$$

Khi đó phương trình (2) trở thành :

$$-\frac{y^3}{2} + \frac{3}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(y^2 - 1),$$

hay $y^3 + \sqrt{2}y^2 - 3y - 2 = 0,$

hay $(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2} - 1)(y + \sqrt{2} + 1) = 0.$ Từ đó

$$y_1 = \sqrt{2} ; y_{2,3} = -\sqrt{2} \pm 1.$$

1) Với $y_1 = \sqrt{2}$ thì $\sin t + \cos t = \sqrt{2},$

hay $\sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$ vậy $t = \frac{\pi}{4}.$

Suy ra $x = \cos t = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

2) Với $y_2 = -\sqrt{2} - 1,$ thì $\sin t + \cos t = -\sqrt{2} - 1$: phương trình vô nghiệm.

3) Với $y_2 = -\sqrt{2} + 1,$ thì $\sin t + \cos t = -\sqrt{2} + 1,$

hay $x + \sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{2} + 1,$ hay $\sqrt{1 - x^2} = -\sqrt{2} + 1 - x.$

Nếu $-\sqrt{2} + 1 - x < 0$ thì phương trình này vô nghiệm. Xét $-\sqrt{2} + 1 - x > 0$ hay $x < -\sqrt{2} + 1.$

Bình phương hai vế ta được phương trình bậc hai

$$2x^2 - 2(\sqrt{2} - 1)x + 2 - 2\sqrt{2} = 0.$$

Giải phương trình này ta được nghiệm

$$x_1 = \frac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} ; x_2 = \frac{-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

(nghiệm này không thỏa mãn điều kiện $x < -\sqrt{2} + 1$).

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm :

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ và } x = \frac{1}{2} (-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}).$$

Nhận xét : Ta cũng có thể giải bài này bằng phương pháp sau : Đặt $y = \sqrt{1 - x^2}$; $y \geq 0$, ta chuyển phương trình về hệ :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = \sqrt{2}xy, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Đặt $x + y = u$ ta được

$$u^3 + \sqrt{2}u^2 - 3u - \sqrt{2} = 0.$$

Từ đó, ta thu được các nghiệm :

$$u = \sqrt{2} ; u = -\sqrt{2} + 1 ; u = \sqrt{2} - 1.$$

Tính x, y qua u bởi :

$$\begin{cases} x + y = u, \\ xy = \frac{x^4 - 1}{2} \end{cases} \text{ ta thu được } x, y = \frac{u \pm \sqrt{2 - u^2}}{2}.$$

1) Với $u = \sqrt{2}$ ta được $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Với $u = -\sqrt{2} - 1$ thì vô nghiệm.

3) Với $u = -\sqrt{2} + 1$ thì $x = \frac{-\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$. và

$x = \frac{-\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$ (loại).

Ví dụ 16. Giải và biện luận bất phương trình

$$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} + \sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} \leq \sqrt{2a} ; a > 0.$$

Giải : Điều kiện

$$\begin{cases} 2ax - a^2 \geq 0, \\ x + \sqrt{2ax - a^2} \geq 0, \text{ hay } x \geq \frac{a}{2} \\ x - \sqrt{2ax - a^2} \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $\sqrt{2ax - x^2} = t$, $t \geq 0$ thì $x = \frac{t^2 + a^2}{2a}$ và

$$\sqrt{x + \sqrt{2ax - a^2}} = \sqrt{\frac{t^2 + a^2}{2a} + t} = \frac{|t + a|}{\sqrt{2a}},$$

$$\sqrt{x - \sqrt{2ax - a^2}} = \frac{|t - a|}{\sqrt{2a}}.$$

Do đó có thể viết bất phương trình đã cho dưới dạng

$$|t + a| + |t - a| \leq 2a; \quad a > 0. \quad (2)$$

Vì $a > 0$, $t \geq 0$, nên $|t + a| = t + a$, nên có thể đưa (2) về dạng

$$|t - a| \leq a - t.$$

Từ đó suy ra $t - a \leq 0$, hay $0 \leq t \leq a$. Ta thu được bất phương trình đối với x : $0 \leq \sqrt{2ax - a^2} \leq a$, hay $x \leq a$.

Kết hợp với điều kiện (1) ta được nghiệm $\frac{a}{2} \leq x \leq a$.

3. *Phương pháp chuyển về hệ.* Bên cạnh phương pháp đặt ẩn số phụ để đưa về một bài toán khác, có rất nhiều bài toán cần đúng với nhiều ẩn số phụ và tùy theo đặc thù của bài toán đã cho, ta thu được các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng. Chẳng hạn, đối với phương trình

$$\sqrt[m]{a - f(x)} + \sqrt[m]{b + f(x)} = c,$$

ta có thể đặt

$$\sqrt[m]{a - f(x)} = u; \quad \sqrt[m]{b + f(x)} = v$$

Khi đó ta thu được hệ phương trình :

$$\begin{cases} u + v = c, \\ u^m + v^m = a + b. \end{cases}$$

Ví dụ 17. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{2}.$$

Giải : Đặt $\sqrt[3]{x-1} = u$; $\sqrt[3]{3-x} = v$,

thì $u^3 + v^3 = (x-1) + (3-x) = 2$.

Ta được hệ :

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2}, \\ u^3 + v^3 = 2. \end{cases} \quad (1)$$

Mà $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v)$. Suy ra hệ (1) có dạng :

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2} \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 2, \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2} \\ uv = 0. \end{cases}$$

Ta được nghiệm $u = \sqrt[3]{2}$, $v = 0$; $u = 0$, $v = \sqrt[3]{2}$

1) Với $\begin{cases} u = \sqrt[3]{2}, \\ v = 0 \end{cases}$ thì $x = 3$.

2) Với $\begin{cases} u = 0 \\ v = \sqrt[3]{2} \end{cases}$ thì $x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x_1 = 1$ và $x^2 = 3$.

Ví dụ 18. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{2}.$$

Giải : Đặt $u = \sqrt[3]{x-1}$, $v = \sqrt[3]{x-3}$ thì

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{2} \\ u^3 - v^3 = 2; \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{2} - u \\ v^3 = u^3 - 2. \end{cases}$$

Suy ra :

$$(\sqrt[3]{2} - u)^3 = u^3 - 2,$$

$$\text{hay :} \quad (\sqrt[3]{2} - u)^3 = (u - \sqrt[3]{2})(u^2 + \sqrt[3]{2}u + \sqrt[3]{4}),$$

hay $(u - \sqrt[3]{2})(2u^2 - \sqrt[3]{2}u + 2\sqrt[3]{4}) = 0.$

1) Với $u = \sqrt[3]{2}$, thì $v = 0$, phương trình này có nghiệm $x = 3$.

2) Với $2u^2 - \sqrt[3]{2}u + 2\sqrt[3]{4} = 0$; $\Delta = \sqrt[3]{4} - 16\sqrt[3]{4} =$
 $= -15\sqrt[3]{4} < 0$ phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 19. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1.$$

Giải : Điều kiện : $\frac{1}{2} - x \geq 0$ hay $x \leq \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} = u$; $\sqrt{\frac{1}{2} - x} = v$; $v \geq 0$, thì ta được

$$\frac{1}{2} + x = u^3 ; \frac{1}{2} - x = v^2, \text{ do vậy}$$

$$x = \frac{1}{2} - v^2, \tag{1}$$

và $u^3 + v^2 = 1.$

Vậy ta được hệ :
$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^3 + v^2 = 1 ; v \geq 0 \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} u = 1 - v, \\ u^3 = 1 - v^2. \end{cases}$$

Từ đó, ta được phương trình để tính v :

$$(1 - v)^3 = 1 - v^2 = (1 - v)(1 + v)$$

hay : $v(v - 1)(v - 3) = 0$; từ đó

$$v_1 = 0 ; v_2 = 1 ; v_3 = 3.$$

1) Với $v = 0$ thì $u = 1$. Thế vào (1) ta được nghiệm

$$x = \frac{1}{2}.$$

2) Với $v = 1$ thì $u = 0$. Thế vào (1) ta được nghiệm

$$x = -\frac{1}{2}.$$

3) Với $v = 3$ thì $u = -2$. Thế vào (1) ta được nghiệm

$$x = -\frac{17}{2}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = -\frac{17}{2}.$$

Ví dụ 20. Giải phương trình

$$-x^2 + 2 = \sqrt{2-x}.$$

Giải : Điều kiện để biểu thức ở vế phải có nghĩa

$$x \leq 2.$$

Đặt $\sqrt{2-x} = y$; $y \geq 0$, ta được $x = 2 - y^2$.

Vậy ta được hệ :

$$\begin{cases} -x^2 + 2 = y, \\ -y^2 + 2 = x. \end{cases} \quad (1)$$

Trừ các vế tương ứng của hai phương trình của hệ này, ta được :

$$y^2 - x^2 = y - x, \text{ hay } (y - x)(y + x - 1) = 0.$$

Vậy, nghiệm của hệ (1) (nếu có) phải thỏa mãn một trong hai hệ thức : $y = x$ hoặc $y = 1 - x$.

1) Với $y = x$, thì (1) trở thành $-x^2 + 2 = x$, hay $x^2 + x - 2 = 0$, hệ này có nghiệm $x = 1$; $x = -2$, nghiệm $x = -2$ không phù hợp, vì khi đó $y = -2 < 0$.

2) Với $y = 1 - x$, khi đó (1) trở thành

$$\begin{cases} -x^2 + 2 = 1 - x, \\ -(1 - x)^2 + 2 = x; \end{cases} \text{ hay } x^2 - x - 1 = 0.$$

Phương trình này có nghiệm

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Nghiệm đầu không phù hợp, vì vế trái $-x^2 + 2 < 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 1$;

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 21. Với những giá trị nào của a thì bất phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{1 - x} + \sqrt{x} \leq a. \quad (1)$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa : $0 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{x} = u$; $\sqrt{1 - x} = v$; $0 \leq u, v \leq 1$, thì

$$x = u^2 ; 1 - x = v^2, \text{ hay } \begin{cases} u^2 + v^2 = 1, \\ u + v \leq a. \end{cases}$$

Suy ra :

$$(u + v)^2 - 2uv = 1,$$

$$\text{hay } u + v = \sqrt{1 + 2uv} \geq 1.$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của vế trái bằng 1 khi $uv = 0$.

Mà (1) có nghiệm khi và chỉ khi a lớn hơn hoặc bằng giá trị nhỏ nhất của vế trái. Vậy ta phải có $a \geq 1$.

4. Sử dụng các tính chất đặc biệt của hàm số.

Ví dụ 22. Giải bất phương trình :

$$2\sqrt{x} - \sqrt{x - 1} > 4 - \sqrt{3}.$$

Giải : Điều kiện : $x \geq 1$.

Xét hàm số $y = 2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$. Ta có : $y(4) = 4 - \sqrt{3}$

và
$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{2\sqrt{x-1} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x(x-1)}};$$

$$y' = 0 \text{ khi } 2\sqrt{x-1} = \sqrt{x}, \text{ hay } x = \frac{4}{3}.$$

Lập bảng xét dấu :

x	1	$\frac{4}{3}$	4	$+\infty$
y'		-	0	+
y	2	$\sqrt{3}$	$4 - \sqrt{3}$	

Vậy trong đoạn $1 \leq x \leq 4$ thì $\sqrt{3} \leq y \leq 4 - \sqrt{3}$, bất phương trình vô nghiệm.

Khi $x > 4$ thì $y > y(4) = 4 - \sqrt{3}$, (vì hàm số đồng biến trong khoảng này). Nghiệm của bất phương trình là $x > 4$.

Ví dụ 23. (A - 1983). Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4} > 5.$$

Giải : Điều kiện $x \geq -2$. Xét hàm số :

$f(x) = \sqrt{x+9} + \sqrt{2x+4}$. Ta có $f(0) = 5$ và với $x > -2$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+9}} + \frac{1}{\sqrt{2x+4}} > 0.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến với $x > -2$. Vậy khi $-2 \leq x \leq 0$ thì $f(x) \leq f(0) = 5$, bất phương trình vô nghiệm. Khi $x > 0$ thì $f(x) > f(0) = 5$. Vậy mọi $x > 0$ là nghiệm.

Ví dụ 24. Giải và biện luận bất phương trình :

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} < b; \quad a > 0, b > 0.$$

Giải : Điều kiện $-a \leq x \leq a$.

Ta có $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$, nên có thể đặt :

$$\frac{x}{a} = \cos t ; 0 \leq t \leq \pi.$$

Khi đó $x = a \cos t ; \sqrt{a^2 - x^2} = a \sin t$.

Bất phương trình đã cho trở thành

$$a \cos t + a \sin t < b,$$

hay
$$\cos t + \sin t < \frac{b}{a},$$

hay
$$\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) < \frac{b}{a\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Vậy điều kiện để (1) có nghiệm là : $-1 < \frac{b}{a\sqrt{2}}$, hay

$b > -a\sqrt{2}$, điều này luôn luôn đúng. Suy ra (1) luôn luôn có nghiệm.

1) Nếu $\frac{b}{a\sqrt{2}} > 1$ thì mọi t là nghiệm của (1), suy ra

$-a \leq x \leq a$ là một khoảng nghiệm của bất phương trình đã cho.

2) Nếu $0 < \frac{b}{a\sqrt{2}} \leq 1$ thì đặt $\frac{b}{a\sqrt{2}} = \cos \alpha, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ta được $\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) < \cos \alpha$ hay $\alpha + \frac{\pi}{4} < t \leq \pi$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos t < \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Rightarrow -a \leq a \cos t < a \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Khi đó nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$-a \leq x < a \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Chú ý : Ngoài phương pháp đặt ẩn số phụ như trên, ta có thể dễ dàng giải bài này theo phương pháp biến đổi thông thường. Bạn đọc có thể tự giải theo cách này.

Ví dụ 25. Với những giá trị nào của m thì phương trình sau đây sẽ có nghiệm duy nhất :

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = m.$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa : $0 \leq x \leq 1$.

Nhận xét rằng nếu x_0 là nghiệm thì $1 - x_0$ cũng là nghiệm của phương trình, do đó, nếu $x_0 \neq 1 - x_0$ thì phương trình sẽ có ít nhất hai nghiệm. Suy ra $x_0 = 1 - x_0$

hay $x_0 = \frac{1}{2}$. Vậy khi $x_0 = \frac{1}{2}$ thì :

$$m = 2 \sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2 \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ngược lại, ta chứng minh rằng khi $m = 2 \sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2 \sqrt{\frac{1}{2}}$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

Ta có (theo bất đẳng thức Côsi) :

$$2\sqrt{x} \sqrt{1-x} \leq x + 1 - x = 1,$$

$$\text{hay } x + (1-x) + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} \leq 2.$$

$$\text{hay } (\sqrt{x} + \sqrt{1-x})^2 \leq 2, \text{ hay } \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2},$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1 - x$ hay $x = \frac{1}{2}$. Tương tự,

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} \leq \sqrt{2(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}.$$

Vậy

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt{x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}} =$$

$$= 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}},$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$.

Vậy khi $m = 2\sqrt[4]{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{1}{2}}$, thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

Nhận xét 1 : Có thể giải bài toán trên bằng phương pháp tìm cực trị của biểu thức vế trái.

Nhận xét 2 : Ngoài các phương pháp cơ bản được trình bày ở trên, còn một số phương pháp khác cũng được sử dụng, như các phương pháp tam thức bậc hai, ứng dụng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, bất đẳng thức, phương pháp lượng giác, phương pháp hàm hợp và hàm ngược. Bạn đọc có thể thấy các phương pháp đó trong các chương về hàm số, tam thức bậc hai và lượng giác.

§2. Hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa căn

Ví dụ 26. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ |x| + |y| = 1. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x \geq 0$; $y \geq 0$. Với điều kiện đó thì

$$|x| = x ; |y| = y.$$

Ta có : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$. Do hai vế đều ≥ 0 nên có thể bình phương hai vế :

$$x + y + 2\sqrt{xy} = 1,$$

Vậy có thể viết hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} = 1, \\ x + y = 1 ; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} 2\sqrt{xy} = 0, \\ x + y = 1; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Hệ này cho ta các nghiệm $x_1 = 1, y_1 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = 1$.

Ví dụ 27. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Xét phương trình đầu của hệ :

$$\sqrt{x+1} = 1 - \sqrt{y}. \quad (1)$$

1) Nếu $\sqrt{y} > 1$ hay $y > 1$, thì phương trình vô nghiệm, do vậy hệ đã cho là vô nghiệm.

2) Vậy phải có $0 \leq y \leq 1$, tương tự $0 \leq x \leq 1$.

Với các điều kiện này thì

$$\begin{cases} 1+x \geq 1, \\ y \geq 0. \end{cases} \text{ Do vậy } \sqrt{1+x} + \sqrt{y} \geq 1. \text{ Suy ra phương trình}$$

đầu có nghiệm chỉ khi $\begin{cases} 1+x = 1, \\ y = 0. \end{cases}$ hay $x = y = 0$. Nghiệm này cũng thỏa mãn phương trình thứ hai. Do vậy $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Ví dụ 28. Với những giá trị nào của a thì hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} + \sqrt{-y+6} = a, \\ \sqrt{-x+6} + \sqrt{y+1} = a. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $-1 \leq x \leq 6$; $-1 \leq y \leq 6$

Nhận xét rằng vì vai trò của x và y như nhau, nên nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) , thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm tức là nếu $x_0 \neq y_0$ thì hệ đã cho có ít nhất là hai nghiệm. Do vậy để hệ có nghiệm duy nhất ta phải có $x_0 = y_0$. Khi đó, ta được :

$$\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-x_0 + 6} = a. \quad (1)$$

Vậy x_0 là nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{x + 1} + \sqrt{-x + 6} = a. \quad (2)$$

Nhưng khi đó $x = 5 - x_0$ cũng là nghiệm của (2).

Thật vậy

$$\begin{aligned} \sqrt{5 - x_0 + 1} + \sqrt{-(5 - x_0) + 6} &= \sqrt{6 - x_0} + \\ &+ \sqrt{1 + x_0} = a \text{ (theo (1)).} \end{aligned}$$

Vậy nếu $x_0 \neq 5 - x_0$ hay $x_0 \neq \frac{5}{2}$ thì (2) có ít nhất hai nghiệm, do vậy hệ đã cho cũng có ít nhất hai nghiệm $x = y = x_0$; $x = y = 5 - x_0$. Vậy phải có

$$x_0 = \frac{5}{2} \text{ (là nghiệm của (2)). Từ đó,}$$

$$a = \sqrt{\frac{5}{2} + 1} + \sqrt{-\frac{5}{2} + 6} = \sqrt{14}.$$

Ngược lại, nếu $a = \sqrt{14}$, thì hệ đã cho có dạng :

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{-y + 6} = \sqrt{14}, \\ \sqrt{-x + 6} + \sqrt{y + 1} = \sqrt{14}. \end{cases} \quad (3)$$

Rõ ràng hệ (3) có nghiệm $x = y = \frac{5}{2}$. Ta chứng minh rằng đó là nghiệm duy nhất của (3). Thật vậy nếu (x_0, y_0) là nghiệm của (3) thì

$$\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-y_0 + 6} = \sqrt{14},$$

$$\sqrt{-x_0 + 6} + \sqrt{y_0 + 1} = \sqrt{14}.$$

Cộng các vế tương ứng, ta được

$$(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-x_0 + 6}) + (\sqrt{y_0 + 1} + \sqrt{-y_0 + 6}) = 2\sqrt{14}.$$

Mà

$$2\sqrt{x_0 + 1} \cdot \sqrt{-x_0 + 6} \leq (\sqrt{x_0 + 1})^2 + (\sqrt{-x_0 + 6})^2,$$

nên suy ra

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x_0 + 1})^2 + (\sqrt{-x_0 + 6})^2 + 2\sqrt{x_0 + 1} \cdot \sqrt{-x_0 + 6} \leq \\ & \leq 2[(\sqrt{x_0 + 1})^2 + (\sqrt{-x_0 + 6})^2], \end{aligned}$$

hay $(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-x_0 + 6})^2 \leq 2 \cdot 7.$

Vậy $\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-x_0 + 6} \leq \sqrt{14}$, có dấu bằng khi và chỉ khi

$$x_0 + 1 = -x_0 + 6 \text{ hay } x_0 = \frac{5}{2}$$

Cũng vậy : $\sqrt{y_0 + 1} + \sqrt{-y_0 + 6} \leq \sqrt{14}$ có dấu bằng khi và chỉ khi $y_0 = \frac{5}{2}$.

$$\text{Suy ra } \sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{-x_0 + 6} + \sqrt{y_0 + 1} + \sqrt{-y_0 + 6} \leq 2\sqrt{14}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_0 = y_0 = \frac{5}{2}$. Kết luận :

Với $a = \sqrt{14}$, thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 29. Giải hệ :

$$\begin{cases} |x + y| + |x - y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Giải : Cách 1.

Đặt $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$. Ta được

$$\begin{cases} x + y = \cos t + \sin t = \sqrt{2} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right), \\ x - y = \cos t - \sin t = -\sqrt{2} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

Khi đó

$$|x + y| + |x - y| = \sqrt{2} \left(\left| \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| + \left| \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| \right).$$

Vậy hệ đã cho trở thành

$$\left| \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| + \left| \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}.$$

Hai vế của bất phương trình này đều không âm. Bình phương hai vế, ta được

$$\cos^2 \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + \sin^2 \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + \left| \sin \left(2t - \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq 2$$

hay $|\cos 2t| \leq 1$.

Vậy mọi t là nghiệm. Suy ra mọi x, y :

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

là nghiệm của hệ đã cho.

Cách 2. Bình phương bất phương trình thứ nhất ta được :

$2(x^2 + y^2) + 2|x^2 - y^2| \leq 4$. Từ đó ta được hệ :

$$\begin{cases} |x^2 - y^2| \leq 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Chú ý rằng nếu $x^2 + y^2 = 1$, thì $|x^2 - y^2| \leq 1$. Do đó nghiệm của hệ sẽ là mọi cặp x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ví dụ 30. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} = 4, \\ x^2 + y^2 = 128. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện

$$\begin{cases} x + y \geq 0, \\ x - y \geq 0; \end{cases} \quad -x \leq y \leq x, \text{ suy ra } x \geq 0.$$

Ta có :

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2} (x + y)^2 + \frac{1}{2} (x - y)^2 = 128. \text{ Vậy}$$

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 = 256.$$

Đặt $\sqrt{x + y} = u, \sqrt{x - y} = v$; $u, v \geq 0$, thì

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} (u^2 + v^2), \\ y = \frac{1}{2} (u^2 - v^2). \end{cases} \quad (1)$$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 4, \\ u^4 + v^4 = 256, \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} u + v = 4, \\ uv(uv - 32) = 0. \end{cases}$$

$$1) \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 0 ; \end{cases}$$

hệ này cho ta nghiệm $u = 4, v = 0$; $u = 0, v = 4$. Thế vào (1) ta được nghiệm của hệ xuất phát : $x_1 = y_1 = 8$; $x_2 = 8, y_2 = -8$.

$$2) \begin{cases} u + v = 4, \\ uv = 32 ; \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $x_1 = 8, y_1 = 8$; $x_2 = 8, y_2 = -8$.

Ví dụ 31. Giải hệ bất phương trình

$$\sqrt{4x - 4} - x \leq \sqrt{x^2 - 4x + 3} \leq x - \sqrt{4x - 4}.$$

Giải : Điều kiện

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ 4x - 4 \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được điều kiện chung là $x = 1$ hoặc $x \geq 3$.

Với điều kiện này ta luôn luôn có $x - \sqrt{4x - 4} \geq 0$.

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương với $x \geq \sqrt{4x - 4}$, hay (do điều kiện) $x^2 \geq 4x - 4$, hay $(x - 2)^2 \geq 0$.

Theo định lý về dấu của tam thức bậc hai, hệ đã cho tương đương với

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3})^2 - (x - \sqrt{4x - 4})^2 \leq 0,$$

hay
$$(x^2 - 4x + 3) - (x^2 + 4x - 4 - 2x\sqrt{4x - 4}) \leq 0,$$

hay
$$-8x + 7 \leq 2x\sqrt{4x - 4}. \quad (1)$$

1) Ta có $x = 1$ thỏa mãn (1), vì $-8 + 7 < 0$.

2) Khi $x \geq 3$, thì $-8x + 7 < 0 < 2x\sqrt{4x - 4}$. Vậy mọi $x \geq 3$ là nghiệm.

Kết luận : Nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là $x = 1$ và $x \geq 3$.

Ví dụ 32. Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau đây có nghiệm.

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 1} = a, \\ x + y = 2a + 1. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x \geq -1$; $y \geq 1$.

Ta viết lại hệ dưới dạng :

$$\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 1} = a, \\ (x + 1) + (y - 1) = 2a + 1. \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x + 1} = u, \sqrt{y - 1} = v$; $u, v \geq 0$. (1)

Ta được hệ :

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = 2a + 1 ; \text{ với } u, v \geq 0 ; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} u + v = a \\ (u + v)^2 - 2uv = 2a + 1 ; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} u + v = a \\ uv = \frac{1}{2} (a^2 - 2a - 1). \end{cases} \quad (2)$$

Để hệ (2) có nghiệm $u, v, u \geq 0, v \geq 0$ thì điều kiện cần và đủ là $a \geq 0$; $a^2 - 2a - 1 \geq 0$ và phương trình :

$$t^2 - at + \frac{1}{2} (a^2 - 2a - 1) = 0 \text{ có nghiệm, tức là}$$

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 2a - 1 \geq 0, \\ \Delta = a^2 - 2(a^2 - 2a - 1) \geq 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được các giá trị a cần tìm là :

$$1 + \sqrt{2} \leq a \leq 2 + \sqrt{6}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

1. Giải các phương trình :

- a) $\sqrt{x + 9} = 5 - \sqrt{2x + 4}$;
- b) $\sqrt{5x + 7} - \sqrt{3x + 1} = \sqrt{x + 3}$;
- c) $\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = \sqrt{2x + 7}$;
- d) $\sqrt{x - 2} - \sqrt{6x - 11} + \sqrt{x + 3} = 0$.

2. Giải các phương trình :

- a) $x^3 + 1 = 2\sqrt{2x - 1}$;
- b) $\sqrt{x - 3} - 2\sqrt{x - 3} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 1$;
- c) $\sqrt{x - \sqrt{4x - 4}} + \sqrt{x + \sqrt{4x - 4}} = 2$;
- d) $\sqrt{x + 3} + 4\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 15 - 8\sqrt{x - 1}} = 6$;
- e) $x + \sqrt{17 - x^2} + x\sqrt{17 - x^2} = 30$;
- f) $x \sqrt[3]{35 - x^3} (x + \sqrt[3]{35 - x^3}) = 30$.

3. Giải các phương trình :

a) $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 4} = 5 - 2x$;

b) $\sqrt[3]{(x+1)^2} + 4\sqrt[3]{(x-1)^2} = 6\sqrt[3]{x^2-1}$;

c) $\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x-a)^2} + \sqrt[3]{x^2-a^2} = \sqrt[3]{a^2}$;

d) $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(1+x)(3-x)} = 2$.

4. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{x^2+x} - 12 < x + 1$;

b) $\sqrt{x+1} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$;

c) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leq x^2 - 6x + 11$;

d) $\frac{3}{\sqrt{2x-3}} - \sqrt{2x-3} > 2$.

5. Xác định m sao cho các bất phương trình sau có nghiệm :

a) $x + 2 < m\sqrt{x+1}$;

b) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x-m} \geq m-1$;

c) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \geq m$;

d) $\sqrt{x} - \sqrt{x-m} > m$;

e) $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq m\sqrt{x-x^2} + 1$.

6. Xác định m sao cho các phương trình sau có nghiệm duy nhất :

a) $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{2-x} = m$;

b) $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = m(\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{3-x})$;

c) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt[3]{1+x^2} = m$;

d) $\sqrt{1-x^2} + 2\sqrt[3]{1-x^2} = m$.

7. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} x\sqrt{4-y^2} = 1, \\ y\sqrt{4-x^2} = 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1, \\ x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}; \end{cases}$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x+y}, \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{12-x+y}; \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = 7, \\ x^2+y^2+xy = 133. \end{cases}$$

8. Giải các hệ bất phương trình :

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{4x-5} < \frac{x}{3}, \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} > 2; \end{cases}$$

$$\text{b) } \sqrt{6x-9} - x \leq \sqrt{x^2-6x+8} \leq x - \sqrt{6x-9}.$$

9. Giải và biện luận các bất phương trình :

$$\text{a) } \sqrt{a-\sqrt{a+x}} \leq \sqrt{x-\sqrt{a+x}};$$

$$\text{b) } \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} \leq 2\sqrt{a}, a > 0;$$

$$\text{c) } x+1 < 2\sqrt{x+a}.$$

10. Hãy xác định a sao cho hệ sau đây có nghiệm :

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = a, \\ \sqrt{y+1} + \sqrt{x} = 1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y+2} = a, \\ x+y = 3a; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \sqrt{\frac{ax+y}{x+ay}} + \sqrt{\frac{x+ay}{ax+y}} = 2, \\ \sqrt{\frac{x+1}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x+1}} = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

11. Hãy xác định m sao cho các hệ sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\text{a) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{1-y} = m+1, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{y} = m+1; \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ x+y \geq m. \end{cases}$$

12. Giải và biện luận các phương trình :

$$\text{a) } \sqrt{x^2-3ax+a^2} + \sqrt{x^2+3ax+a^2} = 2a;$$

$$\text{b) } (a+b)\sqrt{a^2+b^2+x^2} - (a-b)\sqrt{a^2+b^2-x^2} = a^2+b^2;$$

$$c) \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+x}} = \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a} - \sqrt{a-x}} ;$$

$$d) \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = a ;$$

$$e) x^2 = \sqrt{a-x} + a ;$$

$$g) \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x.$$

13. Giải và biện luận các hệ :

$$a) \begin{cases} \sqrt{\frac{a^2-x^2}{y^2-b^2} + \frac{y^2-b^2}{a^2-x^2}} + \sqrt{\frac{a^2+x^2}{y^2+b^2} + \frac{y^2+b^2}{a^2+x^2}} = 4, \\ xy = ab, \quad ab \neq 0 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a, \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = b ; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} + xy = 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a ; \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}} = a, \\ x + y + 3\sqrt[3]{bxy} = b. \end{cases}$$

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG III

1. a) $x = 0$; b) vô nghiệm ; c) vô nghiệm ; d) $x = 6$.

2. b) Điều kiện $x \geq 4$.

Viết phương trình dưới dạng

$$|\sqrt{x-4} - 1| + |\sqrt{x-1} - 1| = 1,$$

hay $|\sqrt{x-4} - 1| = 2 - \sqrt{x-1}$. Khi $x > 5$ phương trình vô nghiệm, (vì vế phải âm). Xét $4 \leq x \leq 5$. Khi đó (1) trở thành $1 - \sqrt{x-4} = 2 - \sqrt{x-1}$,

hay $\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-4}$ có nghiệm $x = 5$.

c) $1 \leq x \leq 2$.

d) $1 \leq x \leq 17$.

e) Đặt $\sqrt{17 - x^2} = y$; $y \geq 0$ ta được hệ số đối xứng :

$$\begin{cases} x + y + xy = 30, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

f) Đặt $\sqrt[3]{35 - x^3} = y$, ta được hệ đối xứng :

$$\begin{cases} xy(x + y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

3. a) Đặt $\sqrt{2x^2 + 4x + 4} = y$, $y \geq 0$ ta được một phương trình bậc hai theo y .

b) Chia hai vế cho $\sqrt[3]{(x - 1)^2}$ và đặt $\sqrt[3]{\frac{x + 1}{x - 1}} = y$, ta được một phương trình bậc hai theo y , nghiệm là

$$x_{1,2} = \frac{(3 \pm \sqrt{5})^3 + 1}{(3 \pm \sqrt{5})^3 - 1}$$

c) Đặt $\sqrt[3]{x + a} = u$; $\sqrt[3]{x - a} = v$ ta đưa về hệ :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 + uv = \sqrt[3]{a^2} \\ u^3 - v^3 = 2a \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u - v = 2\sqrt[3]{a} \\ u^3 - v^3 = 2a. \end{cases}$$

Phương trình có nghiệm $x = 0$.

d) Đặt ẩn số phụ : $\sqrt{1 + x} = u$; $\sqrt{3 - x} = v$ ta được hệ đối xứng

$$\begin{cases} u + v + uv = 2, \\ u^2 + v^2 = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u + v = -1 \pm \sqrt{3}, \\ uv = 3 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

4. a) $x \geq 4$; b) $x > \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}$; c) Điều kiện $2 \leq x \leq 4$.

Bình phương hai vế và đặt

$$\sqrt{-x^2 + 6x - 8} = t, \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ ta được}$$

$$2 + 2t \leq (t^2 - 3)^2, \text{ hay } (2 + (1 - t^2))^2 > 2 + 2t.$$

Do $(2 + (1 - t^2))^2 \geq (2 + 0)^2 = 4 \geq 2 + 2t$, nên suy ra mọi $0 \leq t \leq 1$ là nghiệm, vậy $2 \leq x \leq 4$ là nghiệm của bất phương trình.

d) Đặt ẩn số phụ $\sqrt{2x - 3} = t$ ta đưa về một bất phương trình bậc hai.

5. a) $m > 2$; b) $m \leq 2$; c) mọi m ; d) $0 < m < 1$.

6. a) $m = 2$; b) không tồn tại m ; c) $m = 2$.

7. a) Đặt $x = 2u$; $y = 2v$ ta được hệ

$$\begin{cases} u\sqrt{1 - v^2} = \frac{1}{4}, \\ v\sqrt{1 - u^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Nếu $u \leq 0$ hoặc $v \leq 0$ thì hệ vô nghiệm. Xét $u > 0, v > 0$.

Bình phương các vế, ta được

$$\begin{cases} u^2 - u^2v^2 = \frac{1}{16}, \\ v^2 - u^2v^2 = \frac{1}{16}. \end{cases} \quad (1)$$

Từ đó, suy ra $u^2 = v^2$.

Thế vào phương trình thứ nhất của (1) ta được

$$u^2 = v^2 = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}.$$

b) Đặt $x = \cos\alpha$; $y = \cos\beta$, $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$, thì hệ sẽ có dạng :

$$\begin{cases} \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha = 1, \\ \sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} \sin(\beta + \alpha) = 1, \\ \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

do vậy

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2}; \\ \beta - \alpha = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện của α, β ta được

$$\begin{cases} \beta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \\ \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy
$$\begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}; \\ \alpha = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra nghiệm $x = \frac{\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1}{2}$.

c) Từ phương trình đầu ta suy ra : $y = -x$ hoặc $y = 1 - x$.

Thế vào phương trình thứ hai, ta được :

1) $\sqrt{2x} = \sqrt[3]{2x - 12}$. Phương trình này có nghiệm $x = 2$, vậy $y = -1$.

2) $\sqrt{2x - 1} = \sqrt[3]{2x - 1 - 12}$. Phương trình này có nghiệm $x = \frac{5}{2}$, vậy $y = -\frac{3}{2}$.

d) Đặt $x + y = u$; $\sqrt{xy} = v$; $v \geq 0$, ta được hệ :

$$\begin{cases} u - v = 7, \\ u^2 - v^2 = 133; \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} u - v = 7, \\ u + v = 19. \end{cases}$$

Từ đó, ta thu được $u = 13$, $v = 6$, vậy sẽ có :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 36 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được các nghiệm $x_1 = 4$, $y_1 = 9$; $x_2 = 9$, $y_2 = 4$.

8. a) $x > 18 + \sqrt{279}$.

b) $x \geq 4$.

9. a) $a \neq 0$ thì bất phương trình vô nghiệm, $a = 0$ thì nghiệm của bất phương trình là $x = 0$.

b) $-a \leq x \leq a$.

10. a) $a = 1$.

b) Không tồn tại a .

c) Từ phương trình đầu ta rút ra $(a - 1)(x - y) = 0$.

Nếu $a = 1$ thì nghiệm $x_1 = 4t - 1$; $y_1 = t$;

$$x_2 = \frac{t}{4} - 1 ; y_2 = t, t \text{ tùy ý.}$$

Nếu $a \neq 1$ thì $x_1 = \frac{1}{3}$; $y_1 = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{4}{3}$; $y_2 = -\frac{4}{3}$.

11. a) $a = \sqrt{2} - 1$;

b) $m = 1$.

12. a) $a < 0$ vô nghiệm ; $a \geq 0$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

b) $a = b = 0$, thì $x = 0$; $a^2 + b^2 > 0$ thì đặt $x = \sqrt{a^2 + b^2}t$ ta đưa về phương trình :

$$(a + b)\sqrt{1 + t^2} - (a - b)\sqrt{1 - t^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Đặt

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos\alpha ; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin\alpha ;$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2}\cos\varphi, \\ \sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2}\sin\varphi. \end{cases}$$

Ta đưa về phương trình : $\cos(\alpha - \alpha) = 1$, hay $\varphi = \alpha + 2k\pi$.

Vậy : $\begin{cases} \sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2}\sin\alpha, \\ \sqrt{1+t^2} - \sqrt{1-t^2} = \sqrt{2}\cos\alpha; \end{cases}$ suy ra

$$\sqrt{1+t^2} = \sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) = 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right),$$

hay $t = \pm \sqrt{4\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}.$

Từ đó, ta được nghiệm :

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{(a^2 + b^2) \left[4\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]}.$$

e) $a \leq 0$ phương trình vô nghiệm. Xét $a > 0$.

Đặt $x = at$, ta đưa về phương trình dạng :

$$\frac{\sqrt{1+t}}{1+\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}, \text{ hay}$$

$$\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t} = 2\sqrt{1-t^2}.$$

Nếu $t \leq 0$ phương trình đã cho vô nghiệm. Khi $t > 0$, ta có thể bình phương hai vế :

$$2 - 2\sqrt{1-t^2} = 4(1-t^2), \text{ hay}$$

$$2t^2 - 1 = \sqrt{1-t^2}. \text{ Giải phương trình này ta được nghiệm}$$

$$t = \frac{4}{5}. \text{ Do vậy } x = \frac{4}{5}a \text{ là nghiệm của phương trình đã cho.}$$

d) $a < \sqrt{2}$, phương trình vô nghiệm ; $a = \sqrt{2}$ phương trình có nghiệm $x = 0$. Khi $a > \sqrt{2}$ phương trình luôn luôn có nghiệm duy nhất vì vế trái là một hàm đồng biến.

13. a) Đặt $x = au$; $y = bv$ ta đưa về hệ :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1-u^2}{v^2-1} + \frac{v^2-1}{1-u^2}} + \sqrt{\frac{1+u^2}{1+v^2} + \frac{1+v^2}{1+u^2}} = 4, \\ uv = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Hệ (1) tương đương với :

$$\begin{cases} v = \frac{1}{u}, \\ \sqrt{u^2 + \frac{1}{u^2}} + \sqrt{u^2 + \frac{1}{u^2}} = 4 ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{1}{u}, \\ u^2 + \frac{1}{u^2} = 4. \end{cases}$$

b) Đặt $y = xt$, ta đưa về phương trình để xác định t .

c) Đặt $\sqrt{x^2 + y^2} = u$; $xy = v$, ta được hệ đơn giản sau đây để xác định u, v :

$$\begin{cases} 2u + v = 1, \\ u^2 = av. \end{cases}$$

CHƯƠNG IV

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ SIÊU VIẾT

A. Một số tính chất cơ bản của hàm số mũ :

$$y = a^x, a > 0$$

$$1) a^0 = 1, \quad 1^x = 1, \quad a^x > 0.$$

$$2) a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$3) \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

$$4) (a^{x_1})^{x_2} = (a^{x_2})^{x_1} = a^{x_1 x_2}$$

$$5) a_1^x \cdot a_2^x = (a_1 a_2)^x$$

$$6) \frac{a_1^x}{a_2^x} = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^x$$

7) Khi $a > 1$ thì $x_1 > x_2$ khi và chỉ khi $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Khi $0 < a < 1$ thì $x_1 < x_2$ khi và chỉ khi $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Do vậy, bất đẳng thức $a^{x_1} > a^{x_2}$ tương đương với

$$(a - 1)(x_1 - x_2) > 0.$$

8) Phương trình $[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{h(x)}$ tương đương với hệ :

$$\begin{cases} [f(x) - 1][g(x) - h(x)] = 0. \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Chú ý : Có thể xảy ra nghiệm $x = x_0$ mà $f(x_0) < 0$ nếu biểu thức $(f(x_0))^{g(x_0)}$ và $(f(x_0))^{h(x_0)}$ đều có nghĩa. Tuy vậy, trong chương trình trung học phổ thông, những nghiệm như vậy có thể không cần xét đến (do điều kiện đặt ra đối với cơ số của hàm số mũ).

B. Một số tính chất cơ bản của hàm số lôgarit :

$$y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$$

$$1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1.$$

$$2) a^{\log_a x} = x, \log_a a^y = y.$$

$$3) \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

$$4) \log_a \beta x = \frac{1}{\beta} \log_a x.$$

$$4') \log_a kx^k = \log_a x.$$

$$5) \log_a(x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2| \text{ khi } x_1 x_2 > 0$$

$$6) \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2| \text{ khi } x_1 x_2 > 0.$$

$$7) \log_a b = \frac{1}{\log_b a} : a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.$$

$$8) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, c > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, c \neq 1.$$

$$9) \text{ Khi } a > 1 \text{ thì } x_1 > x_2 \text{ khi và chỉ khi } \log_a x_1 > \log_a x_2 (x_2 > 0).$$

$$\text{Khi } 0 < a < 1 \text{ thì } x_1 < x_2 \text{ khi và chỉ khi } \log_a x_1 > \log_a x_2 (x_1 > 0).$$

Do vậy :

bất đẳng thức $\log_a x_1 > \log_a x_2$ tương đương với bất đẳng thức

$$(a - 1)(x_1 - x_2) > 0.$$

$$10) \text{ Phương trình } \log_{g(x)} f(x) = \log_{g(x)} h(x) \text{ tương đương với hệ}$$

$$\begin{cases} g(x) > 0, g(x) \neq 1, \\ f(x) = h(x) > 0. \end{cases}$$

§1. Phương trình và bất phương trình chứa hàm số mũ

a) Phương pháp lôgarit hóa và đưa về cùng cơ số.

Ví dụ 1. Giải phương trình :

$$2^{x^2} = 3^{x-1}.$$

Giải : Lấy lôgarit hai vế :

$$\log_2 2^{x^2} = \log_2 3^{x-1},$$

$$\text{hay } x^2 = (x - 1) \log_2 3,$$

hay $x^2 - x\log_2 3 + \log_2 3 = 0 :$

$$\Delta = \log_2^2 3 - 4\log_2 3 = \log_2 3(\log_2 3 - 4) < 0.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}.$$

Giải : Biến đổi hai vế của phương trình :

$$2^x(1 + 2 + 4 + 8) = 3^x(1 + 3 + 9)$$

hay $15 \cdot 2^x = 13 \cdot 3^x.$

hay $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{13}{15},$ suy ra $x = \log_{2/3} \frac{13}{15}.$

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 12.$$

Giải : Lấy lôgarit (cơ số 2) hai vế ta được

$$\log_2(2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x-2}) = \log_2 12,$$

hay $x + (x - 1)\log_2 3 + (x - 2)\log_2 5 = 2 + \log_2 3.$

hay $x(1 + \log_2 3 + \log_2 5) = 2 + 2\log_2 3 + 2\log_2 5,$

hay $x = \frac{2(1 + \log_2 3 + \log_2 5)}{1 + \log_2 3 + \log_2 5} = 2.$

Vậy $x = 2$ là nghiệm.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\sqrt[4]{x^x} = x \sqrt[4]{x}.$

Giải : Điều kiện $x > 0.$ Lấy lôgarit hai vế, ta được :

$$\frac{x}{4} \lg x = \sqrt[4]{x} \lg x$$

hay $\left(\frac{x}{4} - \sqrt[4]{x}\right) \lg x = 0.$

1) Với $\lg x = 0,$ ta được nghiệm $x = 1.$

2) Với $\frac{x}{4} - \sqrt[4]{x} = 0$, hay $\frac{x}{4} = \sqrt[4]{x}$, hay $x^4 = 256x$.

Ta được nghiệm $x = \sqrt[3]{256}$. Vậy phương trình có các nghiệm

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \sqrt[3]{256}.$$

Ví dụ 5. Giải và biện luận phương trình

$$(x^2 + 1)^{x^2 - 2x + 1} = \cos \alpha.$$

Giải : 1) Nếu $\cos \alpha \leq 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm vì vế trái luôn dương.

2) Xét $\cos \alpha > 0$, hay $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$(x^2 + 1)^{(x-1)^2} = \cos \alpha.$$

Do $x^2 + 1 \geq 1$ và $(x-1)^2 \geq 0$, nên

$$(x^2 + 1)^{(x-1)^2} \geq (x^2 + 1)^0 = 1.$$

Do vậy, nếu i) $\cos \alpha < 1$ thì phương trình vô nghiệm.

ii) Xét $\cos \alpha = 1$, hay $\alpha = 2k\pi$, khi đó phương trình trở thành :

$$(x^2 + 1)^{(x-1)^2} = 1.$$

Ta có $x = 0$ là nghiệm ; giả sử $x \neq 0$, ta được $(x^2 + 1)^{(x-1)^2} = (x^2 + 1)^0$, hay $(x-1)^2 = 0$, hay $x = 1$.

Kết luận : 1) Nếu $\alpha \neq 2k\pi$ thì phương trình vô nghiệm.

2) Nếu $\alpha = 2k\pi$ thì nghiệm của phương trình là $x_1 = 0$ và $x_2 = 1$.

Ví dụ 6. Giải bất phương trình

$$(x^2 - 1)^{x^2 + 2x} > |x^2 - 1|^3.$$

Giải : Điều kiện $x^2 - 1 > 0$, hay $x > 1$ hoặc $x < -1$. (1)

Khi đó có thể viết bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$(x^2 - 1)^{x^2 + 2x} > (x^2 - 1)^3,$$

hay $(x^2 - 1 - 1)(x^2 + 2x - 3) > 0$ (xem tính chất 8),

hay $(x^2 - 2)(x^2 + 2x - 3) > 0. \quad (2)$

Bằng cách lập bảng xét dấu vế trái của (2), ta được nghiệm của (2) là : $x < -3$, $-\sqrt{2} < x < 1$, $x > \sqrt{2}$, tất cả đều thỏa mãn điều kiện (1). Vậy đó chính là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình :

$$7 \cdot 3^{x+1} + 5^{x+3} \leq 3^{x+4} + 5^{x+2}.$$

Giải : Chia cả hai vế của phương trình cho 5^{x+1} ta được :

$$7 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + 5^2 \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} \cdot 27 + 5,$$

hay $20 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} \geq 20,$

hay $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} \geq 1$; suy ra $x + 1 \leq 0$, vậy $x \leq -1$ là nghiệm.

b) *Phương pháp đặt ẩn số phụ.* Mục đích chính của phương pháp này là chuyển các bài toán đã cho về phương trình hoặc bất phương trình đại số quen biết.

Ví dụ 8. Giải phương trình :

$$3^{x+2} + 9^{x+1} = 4.$$

Giải : Đặt $3^x = t$, $t > 0$, khi đó phương trình đã cho có dạng :

$$9t + 9t^2 = 4,$$

hay $9t^2 + 9t - 4 = 0$; từ đó ta được

$$t_1 = \frac{1}{3}, \quad t_2 = -\frac{4}{3} \text{ (nghiệm } t_2 \text{ không thích hợp vì } -\frac{4}{3} < 0).$$

Vậy $3^x = \frac{1}{3}$ hay $3^x = 3^{-1}$; ta được nghiệm $x = -1$.

Ví dụ 9. Giải bất phương trình

$$8^x \leq 4(4 - 2^x).$$

Giải : Đặt $2^x = t$; $t > 0$ khi đó bất phương trình có dạng

$$t^3 + 4t - 16 \leq 0,$$

hay $(t - 2)(t^2 + 2t + 8) \leq 0$; từ đó $t \leq 2$, hay $2^x \leq 2$ và ta được nghiệm $x \leq 1$.

Ví dụ 10. Giải bất phương trình

$$(26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x < 1.$$

Giải : Đặt $(2 + \sqrt{3})^x = t$, $t > 0$. Khi đó ta có

$$(2 - \sqrt{3})^x = \frac{1}{t}; \quad (7 + 4\sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{2x} = t^2;$$

$$(26 + 15\sqrt{3})^x = (2 + \sqrt{3})^{3x} = t^3.$$

Vậy bất phương trình đã cho trở thành

$$t^3 + 2t^2 - \frac{2}{t} < 1, \text{ hay } t^4 + 2t^3 - t - 2 < 0,$$

$$\text{hay } (t + 2)(t - 1)(t^2 + t + 1) < 0. \quad (1)$$

Do $t^2 + t + 1 > 0$ nên (1) tương đương với

$$(t + 2)(t - 1) < 0,$$

hay $-2 < t < 1$. Kết hợp với điều kiện $t > 0$ ta được $0 < t < 1$; từ đó suy ra :

$$0 < (2 + \sqrt{3})^x < 1, \text{ hay } x < 0.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x < 0$.

Ví dụ 11. Giải và biện luận phương trình

$$(7 + 3\sqrt{5})^x + a(7 - 3\sqrt{5})^x = 2^{x+3}.$$

Giải : Nhận xét rằng $(7 + 3\sqrt{5})^x \cdot (7 - 3\sqrt{5})^x = 4^x$.

Suy ra :

$$\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 1$$

Chia cả hai vế của phương trình đã cho cho 2^x , ta được :

$$\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x + a \left(\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 8.$$

Đặt $\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = t$, $t > 0$. Ta được phương trình

$$t + \frac{a}{t} = 8, \text{ hay } t^2 - 8t + a = 0,$$

hay $(t - 4)^2 = 16 - a$.

1) Nếu $16 - a < 0$, hay $a > 16$, thì phương trình đã cho vô nghiệm.

2) Nếu $16 - a = 0$ hay $a = 16$, thì $t = 4$, hay

$$\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4, \text{ hay } x = \log_{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} 4.$$

3) Nếu $16 - a > 0$, hay $a < 16$, thì $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - a}$.

i) Nếu $0 < a < 16$ thì cả hai nghiệm $t_{1,2}$ đều thỏa mãn điều kiện $t > 0$. Từ đó

$$\left(\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}\right)^x = 4 \pm \sqrt{16 - a},$$

hay $x = \log_{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} (4 \pm \sqrt{16 - a})$.

ii) Nếu $a \leq 0$, thì $4 - \sqrt{16 - a} \leq 0$, do vậy ta chỉ được nghiệm $x = \log_{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} (4 + \sqrt{16 - a})$

Ví dụ 12. Giải bất phương trình

$$(2a)^{x^2+2x+3} + (1-a)^{x^2+2x+3} \leq (1+a^2)^{x^2+2x+3},$$

$$0 < a < 1.$$

Giải : Đặt $a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, hay $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, thì :

$$\frac{2a}{1+a^2} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha ; \quad \frac{1-a^2}{1+a^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \cos \alpha.$$

Do vậy, nếu chia cả hai vế của bất phương trình cho biểu thức $(1+a^2)^{x^2+2x+3}$ thì ta sẽ được

$$(\sin \alpha)^{x^2+2x+3} + (\cos \alpha)^{x^2+2x+3} \leq 1,$$

$$\text{hay} \quad (\sin \alpha)^{(x+1)^2+2} + (\cos \alpha)^{(x+1)^2+2} \leq 1.$$

Mà $(x+1)^2+2 \geq 2$, do vậy

$$(\sin \alpha)^{(x+1)^2+2} \leq \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

$$\text{và} \quad (\cos \alpha)^{(x+1)^2+2} \leq \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Cộng các vế tương ứng của (1) và (2) ta sẽ có :

$$(\sin \alpha)^{(x+1)^2+2} + (\cos \alpha)^{(x+1)^2+2} \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Vậy bất phương trình đã cho nhận mọi x làm nghiệm.

Ví dụ 13. Giải phương trình

$$4^{x^2+x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1.$$

Giải : Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$2^{2x^2+2x} + 2^{1-x^2} = 2^{(x+1)^2} + 1.$$

Đặt $2^{2x^2+2x} = u$; $2^{1-x^2} = v$; $u, v > 0$, thì

$$u \cdot v = 2^{2x^2+2x} \cdot 2^{1-x^2} = 2^{x^2+2x+1} = 2^{(x+1)^2}.$$

Do vậy phương trình đã cho có dạng :

$$u + v = uv + 1, \text{ hay } (u - 1)(1 - v) = 0.$$

1) Với $u = 1$, thì $2^{2x^2+2x} = 1$, hay $2x^2 + 2x = 0$, ta được các nghiệm $x = 0$ và $x = -1$.

2) Với $v = 1$, thì $2^{1-x^2} = 1$, hay $1 - x^2 = 0$, ta được các nghiệm $x = \pm 1$.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 0$; $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Ví dụ 14. Giải và biện luận phương trình

$$4x^2 + x + a - 2x^2 + 2a - 1 = 2(x+1)^2 - 1.$$

Giải : Đặt

$$4x^2 + x + a = u ; 2x^2 + 2a - 1 = v ; u, v > 0, \quad (1)$$

thì

$$\frac{u}{v} = 2^2(x^2 + x + a) - (x^2 + 2a - 1) = 2x^2 + 2x + 1 = 2(x+1)^2.$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng

$$u - v = \frac{u}{v} - 1,$$

$$\text{hay } uv - v^2 = u - v, \text{ hay } (u - v)(v - 1) = 0.$$

1) Với $v = 1$, thế vào (1), ta được $2x^2 + 2a - 1 = 1$, hay

$$x^2 + 2a - 1 = 0, \text{ hay } x^2 = 1 - 2a. \quad (2)$$

i) Nếu $1 - 2a < 0$, tức là $a > \frac{1}{2}$, thì (2) vô nghiệm.

ii) Nếu $1 - 2a \geq 0$, tức là $a \leq \frac{1}{2}$ thì (2) có nghiệm

$$x = \pm \sqrt{1 - 2a}.$$

2) Với $u = v$, thế vào (1), ta được :

$$4x^2 + x + a = 2x^2 + 2a - 1,$$

hay $2x^2 + 2x + 2a = x^2 + 2a - 1,$

hay $x^2 + 2x + 1 = 0$, từ đó ta được $x = -1$.

Tóm lại :

1) Nếu $a > \frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm $x = -1$.

2) Nếu $a \leq \frac{1}{2}$ thì phương trình có các nghiệm

$$x_1 = -1, x_{2,3} = \pm \sqrt{1 - 2a}.$$

c) Phương pháp chuyển về hệ đại số

Ví dụ 15. Giải phương trình

$$3^x + 3^{3-2x} = 6.$$

Giải : Đặt $3^x = u$, $3^{3-2x} = v$; $u, v > 0$.

Khi đó $\begin{cases} u + v = 6, \\ u^2 \cdot v = 27 ; \end{cases}$ hay $\begin{cases} u + v = 6, \\ u^2(6 - u) = 27. \end{cases}$

Giải hệ này ta được nghiệm :

$$u_1 = 3 ; u_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} ;$$

$$u_3 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}.$$

$$v_1 = 3 ; v_2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Với $\begin{cases} u_1 = 3, \\ v_1 = 3 ; \end{cases}$ thì $\begin{cases} 3^x = 3 \\ 3^{3-2x} = 3 ; \end{cases}$ hay $x = 1$ là nghiệm.

Với $\begin{cases} u_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, \\ v_2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} ; \end{cases}$ ta được $3^x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2},$

hay $x = \log_3 \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm.

Ví dụ 16. Giải phương trình

$$4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 2 + \sqrt{2}.$$

Giải : Đặt $4^{\sin^2 x} = u$; $1 \leq u \leq 4$; $2^{\cos^2 x} = v$; $1 \leq v \leq 2$,
thì $u \cdot v^2 = 4^{\sin^2 x} \cdot 4^{\cos^2 x} = 4^{\sin^2 x + \cos^2 x} = 4$.

Vậy ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 2 + \sqrt{2}, \\ uv^2 = 4, \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} u = 2 + \sqrt{2} - v, \\ v^2(2 + \sqrt{2} - v) = 4. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm $v_1 = \sqrt{2}$;

$v_2 = 1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$; $v_3 = 1 - \sqrt{1 + 2\sqrt{2}}$ (các nghiệm v_2 ,
 v_3 bị loại).

Vậy $2^{\cos^2 x} = \sqrt{2}$,

hay $\cos^2 x = \frac{1}{2}$,

hay $2\cos^2 x - 1 = 0$,

vậy $\cos 2x = 0$,

hay $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$,

hay $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; k nguyên.

Ví dụ 17. Giải phương trình

$$\frac{8}{2^{x-1} + 1} + \frac{2^x}{2 + 2^x} = \frac{18}{2^{x-1} + 2^{1-x} + 2}.$$

Giải : Viết lại phương trình đã cho dưới dạng :

$$\frac{8}{2^{x-1} + 1} + \frac{1}{2^{1-x} + 1} = \frac{18}{2^{x-1} + 2^{1-x} + 2}$$

Đặt $2^{x-1} + 1 = u$, với $u > 1$; $2^{1-x} + 1 = v$ với $v > 1$. (1)

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } u \cdot v &= (2^{x-1} + 1)(2^{1-x} + 1) = \\ &= 2^{x-1} + 2^{1-x} + 2 = u + v. \end{aligned}$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} \frac{8}{u} + \frac{1}{v} = \frac{18}{u+v}, \\ u + v = uv; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} u + v = uv, \\ 8v + u = 18. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được các nghiệm $v_1 = 2$; $u_1 = 2$; $v_2 = \frac{9}{8}$; $u_2 = 9$.

Thế u_1 và u_2 vào (1) ta được lần lượt

$$2^{x-1} + 1 = 2, \text{ hay } 2^{x-1} = 1, \text{ hay } x = 1 ;$$

và $2^{x-1} + 1 = 9, \text{ hay } 2^{x-1} = 8, \text{ hay } x = 4.$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm : $x_1 = 1$ và $x_2 = 4$.

Ví dụ 18. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{2^{-x} + 2^{-1}} + \frac{2}{2^{x-1} - 1} < \frac{5}{3(2^{x-1} + 2^{1-x})}$$

Giải : Điều kiện $2^{x-1} - 1 \neq 0$ hay $x \neq 1$.

Ta viết lại bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$\frac{2}{2^{1-x} + 1} + \frac{2}{2^{x-1} - 1} < \frac{5}{3(2^{x-1} + 2^{1-x})}$$

Đặt $2^{1-x} + 1 = u$, $u > 1$;

$$\text{và} \quad 2^{x-1} - 1 = v, \quad v > -1 \quad (1)$$

Khi đó :

$$2^{1-x} + 2^{x-1} = u + v > 0,$$

$$\text{và } u.v = (2^{1-x} + 1)(2^{x-1} - 1) = 2^{x-1} - 2^{1-x} = v - u + 2.$$

Vậy ta được hệ :

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{2}{v} < \frac{5}{3(u+v)}, \\ uv = v - u + 2; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \frac{2(u+v)}{uv} - \frac{5}{3(u+v)} < 0, \\ uv = v - u + 2; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \frac{6(u+v)^2 - 5uv}{3uv(u+v)} < 0, \\ uv = v - u + 2. \end{cases}$$

Do $u + v > 0$, nên ta có :

$$\begin{cases} \frac{6(v-u)^2 + 19uv}{uv} < 0, \\ v - u = uv - 2; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \frac{6(uv-2)^2 + 19uv}{uv} < 0, \\ v - u = uv - 2; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \frac{6(uv)^2 - 5(uv) + 24}{uv} < 0, \\ v - u = uv - 2. \end{cases} \quad (2)$$

Do $6(uv)^2 - 5(uv) + 24 > 0$, nên (2) tương đương với :

$$\begin{cases} uv < 0, \\ v - u = uv - 2. \end{cases} \quad (3)$$

Do $u > 1$, nên (3) tương đương với

$$\begin{cases} v < 0, \\ v = \frac{u-2}{1-u}; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} v < 0, \\ u > 2. \end{cases}$$

Thế vào (1) ta được :

$$\begin{cases} 2^{1-x} + 1 > 2 \\ 2^{x-1} - 1 < 0; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} 2^{1-x} > 1, \\ 2^{x-1} < 1, \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 1-x > 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm $x < 1$.

Kết luận : Bất phương trình đã cho có nghiệm $x < 1$.

Nhận xét : Ta cũng có thể đặt $2^{1-x} = u$; $2^{x-1} = v$ để đưa về hệ đại số :

$$\begin{cases} uv = 1, \\ \frac{2}{u+1} + \frac{2}{v-1} < \frac{6}{3(u+v)}, \end{cases}$$

và bằng các phép thế đơn giản ($uv = 1$) ta đưa về hệ :

$$\begin{cases} uv = 1, \\ v - u < 0. \end{cases}$$

d) *Đoán nghiệm và chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình*

Ví dụ 19. Giải phương trình

$$1 + 3^{x/2} = 2^x.$$

Giải : Chia hai vế của phương trình cho 2^x ta được

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1. \quad (1)$$

Để thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1). Hơn nữa đó là nghiệm duy nhất vì $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ và $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$ là các hàm số nghịch biến, nên nếu $x > 2$ thì vế trái của (1) nhỏ hơn vế phải : ngược lại $x < 2$ thì vế trái sẽ lớn hơn vế phải. Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 20. Giải phương trình

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10)2^x + 3 - x = 0.$$

Giải : Đặt $2^x = t$, $t > 0$, ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$3t^2 + (3x - 10)t + 3 - x = 0; \quad (1)$$

$$\Delta = (3x - 10)^2 - 12(3 - x) = 9x^2 - 48x + 64 = (3x - 8)^2.$$

Ta được hai nghiệm của (1) là :

$$t_1 = \frac{-3x + 10 + (3x - 8)}{6} = \frac{1}{3};$$

$$t_2 = \frac{-3x + 10 - 3x + 8}{6} = 3 - x.$$

1) Với $t_1 = \frac{1}{3}$, ta được $2^x = \frac{1}{3}$ và từ đó $x = -\log_2 3$.

2) Với $t_2 = 3 - x$ ta được $2^x = 3 - x$. Ta đoán được nghiệm $x = 1$, vì $2^1 = 3 - 1$. Vế trái là một hàm số đồng biến còn vế phải là một hàm số nghịch biến, do vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình này.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = -\log_2 3$.

Ví dụ 21. Giải phương trình :

$$3^{x^2} = \cos x.$$

Giải : Ta có $x^2 \geq 0$ do vậy $3^{x^2} \geq 3^0 = 1 \geq \cos x$. Suy ra phương trình đã cho tương đương với hệ :

$$\begin{cases} 3^{x^2} = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} ; \text{ hay } \begin{cases} x^2 = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}. \text{ Ta được nghiệm } x = 0.$$

Ví dụ 22. Hãy xác định các giá trị của a sao cho phương trình sau đây có nghiệm :

$$2^x + 4^x = a.$$

Chứng minh rằng với những giá trị a vừa tìm được, phương trình sẽ có nghiệm duy nhất.

Giải : Xét hàm số $f(x) = 2^x + 4^x$. Ta có $f(x) > 0$ với mọi x . Do vậy, nếu $a \leq 0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Xét trường hợp $a > 0$: $f(x)$ là hàm đồng biến và là hàm số liên tục.

Đặt $2^x = t$, $t > 0$, ta được phương trình

$$t^2 + t = a, \text{ hay } \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{4}.$$

Ta được các nghiệm : $t_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a + \frac{1}{4}}$,

$$t_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}}.$$

Nghiệm t_1 bị loại vì $t_1 < 0$. Do $a > 0$ nên $t_2 > 0$, vậy phương trình đã cho có nghiệm :

$$x = \log_2 t_2 = \log_2 \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}} \right).$$

§2. Phương trình và bất phương trình chứa hàm số lôgarit

a) Phương pháp mũ hóa (chuyển về cùng cơ số).

Ví dụ 23. Giải phương trình

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{10} x.$$

Giải : Điều kiện $x > 0$. Ta biến đổi về cùng cơ số 2 :

$$\log_3 x = \log_3 2 \cdot \log_2 x ; \log_4 x = \log_4 2 \cdot \log_2 x ;$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 2 \cdot \log_2 x.$$

Khi đó phương trình đã cho trở thành :

$$\log_2 x (1 + \log_3 2 + \log_4 2 - \log_{10} 2) = 0,$$

hay $\log_2 x = 0$, ta được nghiệm $x = 1$.

Ví dụ 24. Giải bất phương trình

$$3(\log_3 x)^2 + x^{\log_3 x} \leq 6.$$

Giải : Điều kiện $x > 0$. Sử dụng biến đổi :

$$3(\log_3 x)^2 = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}.$$

Do đó có thể viết bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} \leq 6,$$

hay $x^{\log_3 x} \leq 3.$

Lấy lôgarit (cơ số 3) hai vế, ta được :

$$\log_3 x \cdot \log_3 x \leq \log_3 3, \text{ hay } (\log_3 x)^2 \leq 1,$$

hay $-1 \leq \log_3 x \leq 1.$

Suy ra nghiệm $\frac{1}{3} \leq x \leq 3.$

Ví dụ 25. Giải phương trình

$$\log_x (x + 6) = 3.$$

Giải : Điều kiện $x + 6 > 0 ; x > 0, x \neq 1$ hay $0 < x \neq 1$.

Ta biến đổi :

$$\log_x(x + 6) = \log_3 x^3,$$

hay : $x + 6 = x^3,$

hay : $x^3 - x - 6 = 0$, suy ra $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$.

Phương trình này có nghiệm duy nhất $x = 2$. Nghiệm này thỏa mãn các điều kiện đặt ra.

Ví dụ 26. Giải và biện luận phương trình

$$\begin{aligned} \log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} &= \\ &= \log_{7-4\sqrt{3}}[a(x+2)], a > 0. \end{aligned}$$

Giải : Điều kiện $x^2 - 3x + 2 > 0 ; x - 1 > 0 ;$

$$a(x+2) > 0, \text{ hay } x > 2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} &= \log_{(2+\sqrt{3})^{-1}}\sqrt{x-1} = \\ &= -\log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x-1}. \end{aligned}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \log_{2+\sqrt{3}}\sqrt{x^2-3x+2} + \log_{2-\sqrt{3}}\sqrt{x-1} &= \\ &= \log_{2+\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2} \log_{2+\sqrt{3}}(x-2) ; \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \log_{7-4\sqrt{3}}[a(x+2)] &= \log_{(2-\sqrt{3})^2}[a(x+2)] = \\ &= \frac{1}{2} \log_{2-\sqrt{3}}[a(x+2)] = -\frac{1}{2} \log_{2+\sqrt{3}}[a(x+2)]. \end{aligned}$$

Vậy có thể viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$\frac{1}{2} \log_{2+\sqrt{3}}(x-2) = -\frac{1}{2} \log_{2+\sqrt{3}}[a(x+2)],$$

hay : $x - 2 = [a(x + 2)]^{-1},$

hay :
$$x^2 - 4 = \frac{1}{a} ; x^2 = 4 + \frac{1}{a}$$

Vì $a > 0$ nên vế phải lớn hơn 0. Do vậy :

$$x = \pm \sqrt{4 + \frac{1}{a}}$$

Kết hợp với điều kiện $x > 2$ ta có nghiệm :

$$x = \sqrt{4 + \frac{1}{a}}$$

b) *Phương pháp biến đổi hoặc đặt ẩn số phụ*

Ví dụ 27. Giải phương trình :

$$(x - 1)^{\log_2[4(x-1)]} = 8(x - 1)^3.$$

Giải : Điều kiện $4(x - 1) > 0$, $x - 1 > 0$, hay $x > 1$.

Lấy lôgarit (cơ số 2) hai vế, ta được :

$$\log_2(x - 1)^{\log_2[4(x-1)]} = \log_2[8(x - 1)^3],$$

hay

$$\log_2[4(x - 1)] \cdot \log_2(x - 1) = \log_2[8(x - 1)^3].$$

hay

$$[2 + \log_2(x - 1)]\log_2(x - 1) = 3 + 3\log_2(x - 1). \quad (1)$$

Đặt $\log_2(x - 1) = t$, thì (1) có dạng $t^2 - t - 3 = 0$.

Phương trình này có các nghiệm :

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} ; t_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}. \text{ Từ đó ta lần lượt được}$$

$$1) \log_2(x - 1) = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}, \text{ hay } x_1 = 1 + 2^{(1 - \sqrt{13})/2}.$$

$$2) \log_2(x - 1) = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}, \text{ hay } x_2 = 1 + 2^{(1 + \sqrt{13})/2}.$$

Vậy $x_{1,2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ 28. Giải phương trình

$$2 \cdot 2^{(\sqrt{x-2})^2} = \log_2(2x).$$

Giải : Điều kiện $2x > 0$ và $x - 2 \geq 0$, hay $x \geq 2$.

Đặt : $2^{x-1} = y$, với $y \geq 2$; khi đó $x = \log_2 y + 1 = \log_2 2y$.

Ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = \log_2(2x), \\ x = \log_2(2y) ; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} 2^y = 2x, \\ 2^x = 2y ; \end{cases} \text{ suy ra } y \cdot 2^y = x \cdot 2^x. \quad (1)$$

Do hàm số $f(z) = z \cdot 2^z$ đồng biến trên miền $z \geq 2$, nên từ (1) suy ra $x = y$. Vậy ta được $2^x = 2x$. Đường thẳng $y = 2x$ cắt đường cong $y = 2^x$ tại đúng 2 điểm, có hoành độ là $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Với điều kiện $x \geq 2$, phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$.

Ví dụ 29. Giải phương trình

$$\log_2(x - \sqrt{x^2 - 1}) \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 |x - \sqrt{x^2 - 1}|.$$

Giải : Điều kiện $x^2 - 1 \geq 0$, $x - \sqrt{x^2 - 1} > 0$, $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$, hay $x \geq 1$. Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1},$$

hay

$$\log_2(x + \sqrt{x^2 - 1}) \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

hay

$$\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6^2(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

hay $\log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) [\log_2 6 \cdot \log_3 6 \cdot \log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) - 1] = 0$.

1) Với $\log_6(x + \sqrt{x^2 - 1}) = 0$, hay $x + \sqrt{x^2 - 1} = 1$.

Vậy ta được hệ :

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 1, \\ x - \sqrt{x^2 - 1} = 1. \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng ta được nghiệm $x = 1$.

2) Với $\log_2 6 \cdot \log_3 6 \log_6 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1$, hay

$$\log_2 6 \cdot \log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = 1,$$

hay $\log_3 (x + \sqrt{x^2 - 1}) = \log_6 2,$

hay $x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2}$, ta được hệ

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} = 3^{\log_6 2} \\ x - \sqrt{x^2 - 1} = 3^{-\log_6 2} \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng ta được nghiệm

$$x = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}).$$

Tóm lại, phương trình đã cho có các nghiệm :

$$x_1 = 1 \text{ và } x_2 = \frac{1}{2} (3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}).$$

Ví dụ 30. Giải bất phương trình

$$\log_3 (9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2) \leq 3x + 1$$

Giải : Điều kiện $9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2 > 0$, hay $x > \log_3 \frac{2 + \sqrt{22}}{9}$. (1)

Mũ hóa phương trình ta được

$$9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 2 \leq 3^{3x+1}. \quad (2)$$

Đặt $3^x = t$ với $t > \frac{2 + \sqrt{22}}{9}$.

Khi đó (2) có dạng :

$$9t^2 - 4t - 2 \leq 3t^3,$$

hay $3t^3 - 9t^2 + 4t + 2 \geq 0,$

hay $(t - 1) \left(t - \frac{3 - \sqrt{15}}{3} \right) \left(t - \frac{3 + \sqrt{15}}{3} \right) \geq 0.$

Bất phương trình này có nghiệm :

$$t \geq \frac{3 + \sqrt{15}}{3} ; \frac{3 - \sqrt{15}}{3} \leq t \leq 1.$$

Kết hợp với điều kiện $t > \frac{2 + \sqrt{22}}{9}$ ta được nghiệm

$$t \geq \frac{3 + \sqrt{15}}{3} ; \frac{2 + \sqrt{22}}{9} < t \leq 1.$$

1) Với $t \geq \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$, hay $3^x \geq \frac{3 + \sqrt{15}}{2}$, ta được nghiệm

$$x \geq \log_3 \frac{3 + \sqrt{15}}{2}, \text{ nghiệm này thỏa mãn (1).}$$

2) Với $\frac{2 + \sqrt{22}}{9} < t \leq 1$, hay $\frac{2 + \sqrt{22}}{9} < 3^x \leq 1$, ta được nghiệm

$$\log_3 \frac{2 + \sqrt{22}}{9} < x \leq 0.$$

Vậy bất phương trình đã cho các khoảng nghiệm :

$$x \geq \log_3 \frac{3 + \sqrt{15}}{2} ;$$

$$\log_3 \frac{2 + \sqrt{22}}{9} < x \leq 0.$$

c) *Đoán nghiệm và chứng minh tính duy nhất.*

Ví dụ 31. Giải phương trình

$$\lg(x^2 - x - 6) + x = \lg(x + 2) + 4.$$

Giải : Đặt điều kiện $x^2 - x - 6 > 0$, $x + 2 > 0$, hay $x > 3$.

Ta viết phương trình đã cho dưới dạng

$$\lg(x^2 - x - 6) - \lg(x + 2) = 4 - x,$$

$$\text{hay} \quad \lg \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = 4 - x,$$

$$\text{hay} \quad \lg(x - 3) = 4 - x.$$

Nhận xét rằng $x = 4$ là nghiệm của phương trình (hai vế đều bằng 0). Hàm số $y = \lg(x - 3)$ là hàm số đồng biến, trong khi đó hàm số ở vế phải là một hàm số nghịch biến. Do đó, $x = 4$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 32. Giải bất phương trình

$$\log_3(4 \cdot 3^x - 1) \geq 2x + \log_3 4^{(x^2 + 1)}$$

Giải : Điều kiện để các biểu thức có nghĩa

$$4 \cdot 3^x - 1 > 0, \text{ hay } 3^x > \frac{1}{4}, \text{ hay } x > -\log_3 4.$$

Viết bất phương trình đã cho dưới dạng :

$$4 \cdot 3^x - 1 \leq 3^{2x} + \log_3 4^{(x^2 + 1)}$$

$$\text{hay} \quad 4^{(x^2 + 1)} 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0. \quad (1)$$

Đặt $3^x = t$, $t > 0$ và xét tam thức bậc hai :

$$f(t) = 4^{x^2 + 1} \cdot t^2 - 4t + 1.$$

Vì biệt thức

$$\Delta' = 4 - 4^{x^2 + 1} = 4(1 - 4^{x^2}) \leq 0.$$

nên ta luôn có $f(t) \geq 0$. Suy ra (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 0, \\ t = \frac{2}{4^{x^2 + 1}} \end{cases}; \text{ hay } \begin{cases} 4^{x^2} = 1, \\ 3^x = 2 \cdot 4^{-x^2 - 1}. \end{cases}$$

Phương trình đầu có nghiệm duy nhất $x = 0$. Nghiệm này không thỏa mãn phương trình thứ hai. Do vậy, bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 33. Giải phương trình :

$$\log_{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3).$$

Giải : Điều kiện : $x^2 - 2x - 2 > 0$, $x^2 - 2x - 3 > 0$, hay $x < -1$ hoặc $x > 3$.

Viết phương trình đã cho dưới dạng :

$$\log_{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}(x^2 - 2x - 3), \text{ hay :}$$

$$\log_{8+3\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 2) = \log_{7+4\sqrt{3}}(x^2 - 2x - 3). \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } a = 7 + 4\sqrt{3} > 1 ; t = x^2 - 2x - 3 \quad (2)$$

thì phương trình (1) có dạng :

$$\log_{a+1}(t + 1) = \log_a t. \quad (3)$$

Đặt $\log_a t = y$. Ta viết (3) dưới dạng :

$$\begin{cases} t = a^y, \\ t + 1 = (a + 1)^y, \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{hay : } a^y + 1 = (a + 1)^y,$$

$$\text{hay : } \left(\frac{a}{a+1}\right)^y + \left(\frac{1}{a+1}\right)^y = 1. \quad (5)$$

Nhận xét rằng $y = 1$ là nghiệm của (5). Khi $y > 1$ thì vế trái nhỏ hơn vế phải, vì biểu thức bên trái là một hàm nghịch biến. Ngược lại, khi $y < 1$ thì vế trái lớn hơn vế phải. Vậy $y = 1$ là nghiệm duy nhất của (5). Thế vào (4), ta được $t = a$; thế $t = a$ vào (2) ta được $x = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}$.

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là :

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11 + 4\sqrt{3}}.$$

(Các nghiệm này thỏa mãn điều kiện để các biểu thức có nghĩa, vì $x^2 - 2x - 3 = a > 0$).

Ví dụ 34. Giải phương trình

$$2^{\log(x+3)} = x.$$

Giải : Điều kiện để biểu thức vế trái có nghĩa : $x > -3$.

1. Nếu $-3 < x \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Xét $x > 0$. Đặt $\log_5(x+3) = t$. Khi đó ta nhận được hệ

$$\begin{cases} \log_5(x+3) = t, \\ 2^t = x; \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x+3 = 5^t, \\ x = 2^t. \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Suy ra } 5^t - 2^t = 3, \text{ hay } 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{2}{5}\right)^t = 1. \quad (2)$$

Nhận xét rằng $t = 1$ là nghiệm của (2) và vế trái của (2) là một hàm số nghịch biến. Do vậy $t = 1$ là nghiệm duy nhất của (2). Thế vào (1) ta nhận được $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

§3. Hệ phương trình và hệ bất phương trình siêu việt

Các loại hệ phương trình và bất phương trình chứa hàm số mũ và hàm số lôgarit rất đa dạng. Trong nhiều trường hợp, cách giải các hệ như vậy phải vận dụng nhiều kiến thức sâu sắc của toán học. Ở đây, chúng ta chỉ xét những hệ đơn giản nhất, mà chúng có thể giải ngắn gọn, sau một vài phép biến đổi tương đương.

Ví dụ 35. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y^{x^2+x+2} = 1. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $y > 0$. Phương trình thứ hai của hệ có nghiệm : $y = 1$ hoặc $x^2 + x + 2 = 0$ (trường hợp thứ hai không xảy ra vì vế trái của nó > 0). Vậy hệ đã cho có dạng :

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y = 1; \end{cases}$$

hay $x = 2, y = 1$ là nghiệm của hệ.

Ví dụ 36. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^{x+\sqrt{y}} = y^{4/3}, \\ y^{x+\sqrt{y}} = x^{4/3}. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $x > 0$; $y > 0$, nếu (x, y) là nghiệm của phương trình thì ta phải có :

$$(xy)^{x+\sqrt{y}} = (xy)^{4/3} ; \left(\frac{y}{x}\right)^{x+\sqrt{y}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{-4/3}$$

Suy ra :

$$\begin{cases} (xy)^{x+\sqrt{y}-4/3} = 1, \\ \left(\frac{y}{x}\right)^{x+\sqrt{y}+4/3} = 1 \end{cases} \quad (1)$$

a) $xy = 1$ thì $\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$. Khi đó hệ (1) có dạng :

$\left(\frac{1}{x}\right)^{2x+2\sqrt{1/x}+8/3} = 1$. Do $2x + 2\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{8}{3} > 0$, nên suy ra $x = 1$ và $y = 1$. Thử lại ta thấy $x = 1, y = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho.

Vậy $x = 1, y = 1$ là nghiệm của hệ.

2) $\frac{y}{x} = 1$, tức là $y = x$, thì hệ (1) có dạng :

$$x^{2(x+\sqrt{x}-4/3)} = 1.$$

Khi đó, hoặc $x = 1$, thì $y = 1$ là nghiệm, hoặc :

$$2\left(x + \sqrt{x} - \frac{4}{3}\right) = 0 \text{ hay } x + \sqrt{x} - \frac{4}{3} = 0.$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = \frac{11 - \sqrt{57}}{6}$, khi đó hệ đã cho có nghiệm : $x = y = x_1$.

3) $xy \neq 1$; $\frac{y}{x} \neq 1$ thì (1) tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} - \frac{4}{3} = 0, \\ x + \sqrt{y} + \frac{4}{3} = 0 ; \end{cases}$$

hệ này vô nghiệm.

Tóm lại, hệ đã cho có các nghiệm $x = y = 1$,

$$x = y = \frac{11 - \sqrt{57}}{6}.$$

Ví dụ 37. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^y + x = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

Giải : điều kiện $x > 0, y > 0$. Từ phương trình thứ hai của hệ ta có : $y = x^{-2}$. Thế vào phương trình thứ nhất ta được

$$x^{x^{-2}+x} = x^{-2(x-x^{-2})}.$$

1) $x = 1$ thì $y = 1$ và ta được nghiệm $x = y = 1$;

2) $x \neq 1$ thì phải có $x^{-2} + x = -2(x - x^{-2})$ hay

$$\frac{1}{x^2} + x = -2x + \frac{2}{x^2},$$

hay $3x = \frac{1}{x^2}$, hay $x^3 = \frac{1}{3}$. Vậy $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $y = \sqrt[3]{9}$

là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 38. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 = y^4, \\ \lg \frac{x}{y} = \frac{\lg x}{\lg y}. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện : $x > 0, y > 0, y \neq 1$. Từ phương trình đầu của hệ, suy ra : $3\lg x = 4\lg y$. Do vậy

$\log y = \frac{3}{4} \lg x$. Thế vào phương trình thứ hai, ta được

$$\lg x - \frac{3}{4} \lg x = \frac{\lg x}{\frac{3}{4} \lg x},$$

hay $\frac{1}{4} \lg x = \frac{4}{3}$, hay $\lg x = \frac{16}{3}$. Vậy $x = 10^{16/3}$, $y = 10^4$ là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 39. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg x + \lg y = 2. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x > 0$, $y > 0$. Biến đổi phương trình thứ hai của hệ : $\lg xy = 2$, hay $xy = 10^2 = 100$.

Vậy hệ đã cho có dạng :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ xy = 100; \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ 2xy = 200. \end{cases}$$

Cộng và trừ các vế tương ứng, ta được

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 625, \\ (x - y)^2 = 225. \end{cases}$$

Suy ra :

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ x - y = \pm 15. \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $x = 20$, $y = 5$; $x = 5$, $y = 20$.

Ví dụ 40. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2\lg y - \lg x = 2, \\ 2\lg x + \lg y = 1. \end{cases}$$

Giải : Điều kiện $x > 0, y > 0$. Đặt $\lg y = u ; \lg x = v$ ta được hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2u - v = 2, \\ u + 2v = 1. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm $u = 1, v = 0$.

suy ra :

$$\begin{cases} \lg x = 0, \\ \lg y = 1; \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1, \\ y = 10. \end{cases}$$

Vậy $x = 1 ; y = 10$ là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 41. Giải hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2^x + 2^y \leq 1, \\ x + y \geq -2. \end{cases}$$

Giải : Đặt $2^{x/2} = u ; 2^{y/2} = v ; u, v > 0$. (1)

$$\text{Ta được hệ : } \begin{cases} u^2 + v^2 \leq 1, \\ 2^{\frac{x+y}{2}} \geq \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\text{hay : } \begin{cases} u^2 + v^2 \leq 1, \\ uv \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Mà $u^2 + v^2 \geq 2uv$. Do vậy $1 \geq 2uv$, hay $uv \leq \frac{1}{2}$.

Kết hợp với bất phương trình thứ hai ta được $uv = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau đây có nghiệm :

$$u^2 + v^2 = 2uv = 1,$$

hay :

$$u = v = \frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-1/2}.$$

Thế vào (1) ta được :

$$\begin{cases} x^{x/2} = 2^{-1/2}, \\ 2^{y/2} = 2^{-1/2}. \end{cases}$$

Vậy ta được $x = y = -1$ là nghiệm của hệ đã cho.

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Giải các phương trình mũ :

a) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 310$; b) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x - 3^{2x+1} = 0$;

c) $(\sqrt{3} - \sqrt{8})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{8})^x = 6$;

d) $(\sqrt{\sqrt{5}} - 1)^x + 6(\sqrt{\sqrt{5}} + 1)^x = 2^{x+2}$.

2. Giải và biện luận phương trình :

a) $(1 + x^2)^{1 + \sqrt{x+2}} = (1 + x^2)^{a + \sqrt{x+2}}$;

b) $(x - 2)^{x^2 + 2x} = |x - 2|^a$;

c) $(x - a)^{\log_3[25(x-2)]} = 25|x - 2|^a$.

3. Giải các phương trình :

a) $(20 + 14\sqrt{2})^{x/3} + (20 - 14\sqrt{2})^{x/2} = 4^x$;

b) $(9 - \sqrt{45})^{x/2} + 2^{-x}(\sqrt{30} - \sqrt{6})^x = 2$;

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^x = 3$.

4. Giải các phương trình :

a) $\log_3(3^x + 3) \log_3(3^{x+1} + 9) = 2$;

b) $\lg(10^{x+1} - 1) = 2x + \lg 9$;

$$c) \lg(x^2 - x - 12) + x = \lg(x + 3) + 5 ;$$

$$d) \log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) = \frac{9}{4} + \lg_x \sqrt{5}.$$

5. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2, \\ \log_3 x + \log_4 y = 2 ; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2 ; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1, \\ \log_3(x + y) - \log_2(x - y) = 1. \end{cases}$$

6. Giải các bất phương trình :

$$a) 4 \cdot 2^{5x-2} \geq 2^{5x+1} - 120 ;$$

$$b) 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \leq 5^{x-1} + 5^x + 5^{x+1} ;$$

$$c) 25^x \leq 6.5^x - 5 ;$$

$$d) 4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{\sqrt{x}+1}.$$

7. Giải các bất phương trình :

$$a) \log_2 \log_3 \log_4(2x - 1) > 0 ;$$

$$b) \log_3(x - 1) + \log_6 \frac{2}{x+1} > \log_9 4 ;$$

$$c) \lg(9^{\lg x} + 1) \geq \lg \frac{10}{3} + \lg x \cdot \lg 3 ;$$

$$d) 6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12.$$

8. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y^2 = xy ; \end{cases} \quad b) \begin{cases} a^{2x} + a^{2y} = 2b, \\ a^{x+y} = 1 ; \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^y = y^x, \\ a^x = b^y, \end{cases} \quad a, b > 0.$$

9. Giải các phương trình và bất phương trình :

$$a) \log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(5x^2 + 23x + 21) = 4 ;$$

$$b) \log_{1/3}x + \log_{1/9}(x - 1) \leq \log_{1/3}6 ;$$

$$c) \log_x \frac{4x+1}{6(x-1)} < 0 ; \quad d) \log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0.$$

10. Giải và biện luận :

$$a) 2\log_a a + \log_{a^2} a + 3\log_{a^3} a = 0 ;$$

$$b) \log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_a 2 \left(\frac{a^2 - 4}{2a - x} \right) = 1.$$

PHẦN THỨ HAI

HÌNH HỌC

CHƯƠNG I

MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN

§1. Giao tuyến và giao điểm

a) *Giao tuyến.* Theo phép dựng cơ bản thì giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ được coi là dựng được nếu đã biết hai mặt phẳng và biết chúng cắt nhau. Tuy nhiên trong một số bài toán ta cần chỉ ra được giao tuyến cụ thể là đường thẳng nào. Để dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng α, β có thể dùng một trong hai cách sau :

Cách 1. Tìm hai điểm A, B cùng thuộc hai mặt phẳng đã cho. Giao tuyến cần tìm là đường thẳng AB .

Cách 2. Nếu α, β lần lượt chứa hai đường thẳng a, b song song với nhau, ta tìm một điểm chung A của α và β . Giao tuyến cần dựng là đường thẳng d , qua A , song song với a và b .

Ví dụ 1. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang ($AD \parallel BC$). Dựng giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) ; b) (SAD) và (SBC) .

Giải : (hình 12). a) Trong hình thang $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O , S và O là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên giao tuyến của chúng là đường SO .

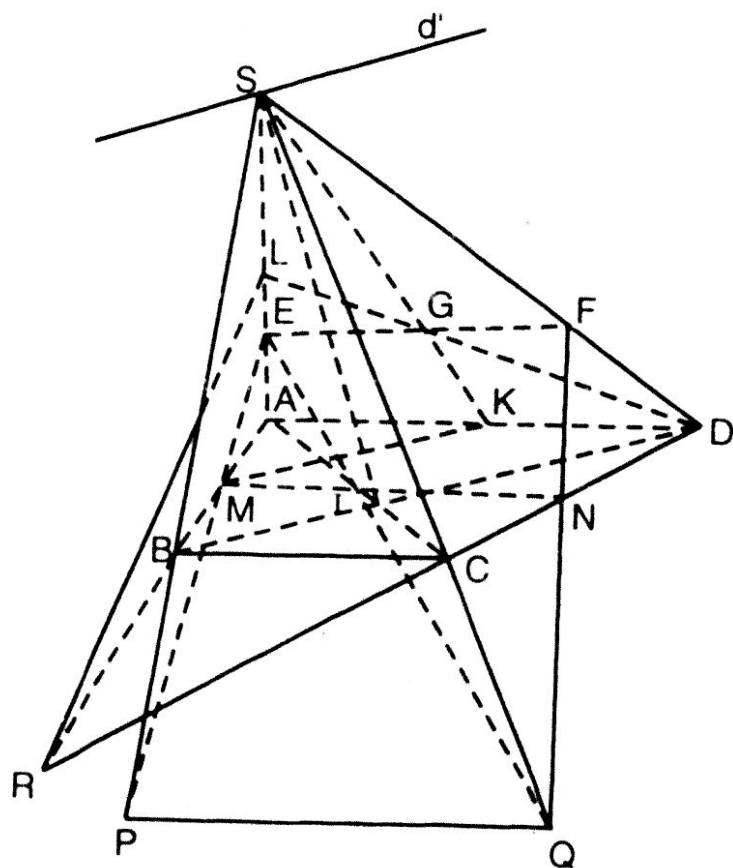
b) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung là S. Do $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d qua S, song song với AD và BC.

Chú ý : Một điểm chung của hai mặt phẳng α, β thường tìm được bằng cách : chọn một mặt phẳng γ , sao cho các giao tuyến d_1 và d_2 của α, β với γ có thể dựng ngay được. Giao điểm O của d_1 và d_2 (trong γ) là điểm chung cần tìm.

Trong ví dụ trên, khi chọn (ABCD) làm mặt phẳng thứ ba, ta tìm được điểm chung O của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Ví dụ 2. Với giả thiết của ví dụ 1, gọi M, N, G là điểm giữa các đoạn AB, CD và trọng tâm ΔSAD . Dựng giao tuyến giữa

mặt phẳng (MNG) với các mặt phẳng (SAC), (SAB), (SBC).



Hình 12

Giải : Do $MN \parallel AD$ nên (GMN) cắt (SAD) theo giao tuyến d đi qua G, song song với AD, d cắt SA tại E, SD tại F. Gọi I là giao điểm của MN và AC (cùng thuộc mặt phẳng đáy). Để thấy rằng giao tuyến của (MNG) với (SAC) là đường EI, và (MNG) cắt (SAB) theo đường EM.

Trong mặt phẳng (SAB), EM cắt SB tại P. Trong (SAC), EI cắt SC tại Q. Đường PQ là giao tuyến của (MNG) và (SBC) (hình 12). Chú ý rằng $PQ \parallel BC$ và ba điểm F, N, Q thẳng hàng.

Ví dụ 3. Với giả thiết của ví dụ 2, hãy dựng giao tuyến của các cặp mặt phẳng : a) (GND) và (SAB) ; b) (SMG) và (SBD).

Giải : a) Trong (ABCD), hai đường AB và DN cắt nhau tại R. Trong (SAD), DG cắt SA tại L (L là điểm giữa đoạn SA). Dễ thấy rằng LR là giao tuyến của (GND) và (SAB).

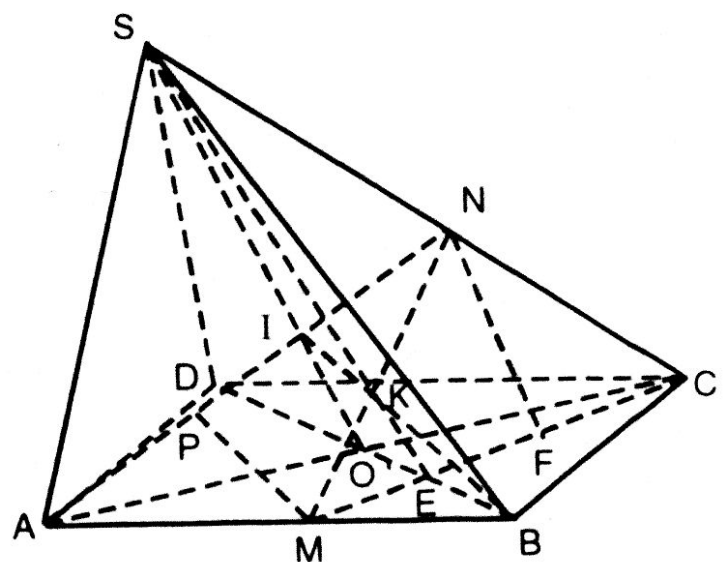
b) SG cắt AD tại điểm K của đoạn này. (SMG) cắt (ABCD) theo giao tuyến MK. Vì MK là đường trung bình của $\triangle ABD$, nên $MK \parallel BD$. Vậy giao tuyến của (SMG) và (SBD) là đường thẳng d' qua S, song song với BD (hình 12).

b) *Giao điểm.* Để dựng giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng α , cần chọn một mặt phẳng β chứa d , sao cho giao tuyến m của α và β dựng được ngay. Giao điểm O của d và m (lấy trong mặt phẳng β) là điểm cần dựng.

Ví dụ 4. Hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. M, N là điểm giữa các đoạn AB, SC.

a) Dựng các giao điểm I, K của các đường AN, MN với mặt phẳng (SBD). Tính các tỉ số

$$\frac{IA}{IN}, \quad \frac{KM}{KN}$$



Hình 13

b) Chứng minh rằng ba điểm B, I, K thẳng hàng ; tính tỉ số $\frac{IB}{IK}$.

Giải : a) Chọn (SAC) là mặt phẳng chứa AN. (SAC) cắt (SBD) theo giao tuyến SO, với O là tâm của đáy. Giao điểm của AN với SO là điểm I cân dựng. Để thấy rằng I là trọng tâm ΔSAC nên $\frac{IA}{IN} = 2$ (hình 13).

Tương tự, gọi E là giao điểm của MC và BD ; mặt phẳng (MSC) chứa MN cắt (SBD) theo giao tuyến SE. Vậy giao điểm của MN và SE là giao điểm K của MN với mặt phẳng (SBD).

Do $\frac{EM}{EC} = \frac{BM}{DC} = \frac{1}{2}$, nên nếu gọi F là điểm giữa EC, thì $ME = FE = FC$.

Do đó NF là đường trung bình của ΔSEC (hình 13). Vậy $NF \parallel SE$.

Suy ra KE là đường trung bình của ΔMNF , từ đó

$$\frac{KM}{KN} = 1.$$

b) Ba điểm B, I, K cùng nằm trên hai mặt phẳng (SBD) và (NAB) nên sẽ nằm trên giao tuyến của chúng. Vậy B, I, K thẳng hàng. Do $IA = 2IN$, nên nếu gọi P là điểm giữa IA, thì $AP = PI = IN$ (hình 13). Do K là điểm giữa MN nên

$$IK \parallel \frac{1}{2} MP.$$

Vậy MP là đường trung bình của ΔABI . Suy ra

$$MP = \frac{1}{2} BI.$$

$$\text{Do đó } IK = \frac{1}{4} IB, \text{ hay } \frac{IB}{IK} = 4.$$

§2. Quan hệ song song

a) *Đường thẳng song song với mặt phẳng.* Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng α có thể chỉ ra rằng trong α có chứa một đường thẳng a song song với d .

b) *Hai mặt phẳng song song.* Để chứng minh $\alpha \parallel \beta$, có thể chỉ ra rằng trong mặt phẳng này có chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt kia, hoặc chỉ ra một mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng của mặt phẳng kia.

Ví dụ 1. Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. I, G là trọng tâm các tam giác ABC, ACC' . Chứng minh rằng $IG \parallel (ABC')$.

Giải : (hình 14). Gọi M là điểm giữa AC . Vì I là trọng tâm ΔABC nên M, I, B thẳng hàng và

$$\frac{MI}{MB} = \frac{1}{3}. \text{ Tương tự } M,$$

G, C' thẳng hàng và

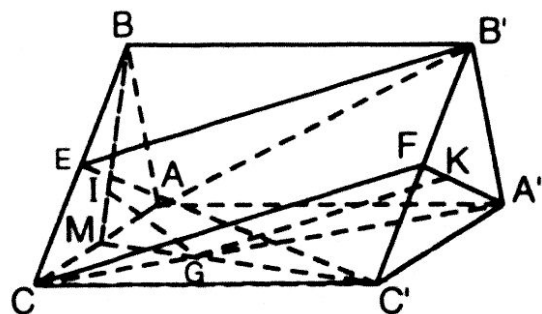
$$\frac{MG}{MC'} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó } \frac{MI}{MB} = \frac{MG}{MC'} \left(= \frac{1}{3} \right).$$

Hình 14

Suy ra $IG \parallel BC'$, từ đó $IG \parallel (ABC')$.

Chú ý : Đường thẳng a cần tìm trong α thường vẽ được bằng cách chọn một mặt phẳng β có chứa a , sao cho giao tuyến của β



và α có thể dựng được ngay. Giao tuyến đó là đường thẳng a . Trong ví dụ trên mặt phẳng (MBC') đóng vai trò của mặt phẳng β .

Ví dụ 2. Với giả thiết của ví dụ 1 và K là trọng tâm $\Delta A'B'C'$, hãy chứng minh rằng $GK \parallel (BB'C'C)$.

Giải : (hình 14). Gọi F là điểm giữa $B'C'$, ta có F, K, A' thẳng hàng và $\frac{A'K}{A'F} = \frac{2}{3}$.

Mặt khác, dễ thấy A', G, C thẳng hàng, và $\frac{A'G}{A'C} = \frac{2}{3}$.

Do đó $GK \parallel CF$. Vậy $GK \parallel (BB'C'C)$.

Ví dụ 3. Với giả thiết của ví dụ 1 và ví dụ 2 hãy chứng minh rằng : a) $(IGK) \parallel (BB'C'C)$; b) $(A'GK) \parallel (AIB')$.

Giải : a) Theo các chứng minh trên $IG \parallel BC'$, $GK \parallel CF$, vậy $(IGK) \parallel (BB'C'C)$.

b) (hình 14), $(A'GK)$ là mặt phẳng $(A'CF)$. Gọi E là điểm giữa BC , (AIB') là mặt phẳng (AEB') . Dễ thấy rằng $CF \parallel EB'$ và $A'F \parallel AE$ nên $(A'GK) \parallel (AIB')$.

Chú ý : Để tạo ra hai đường thẳng a, b song song với nhau lần lượt thuộc α, β , $\alpha \parallel \beta$ nên chọn một mặt phẳng thứ ba γ , sao cho giao tuyến của α, β với γ dễ dựng, đó chính là hai đường cần tìm.

Trong ví dụ trên, các mặt phẳng $(BB'C'C)$ và $(AA'FE)$ lần lượt đóng vai trò mặt phẳng thứ ba.

Ví dụ 4. M, N, P là điểm giữa các cạnh AB, B_1C_1, DD_1 của hình hộp $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (BDC_1)$.

Giải : (hình 15). Gọi E là điểm giữa DC_1 . Dễ thấy

$$PE \parallel \frac{1}{2} D_1C_1.$$

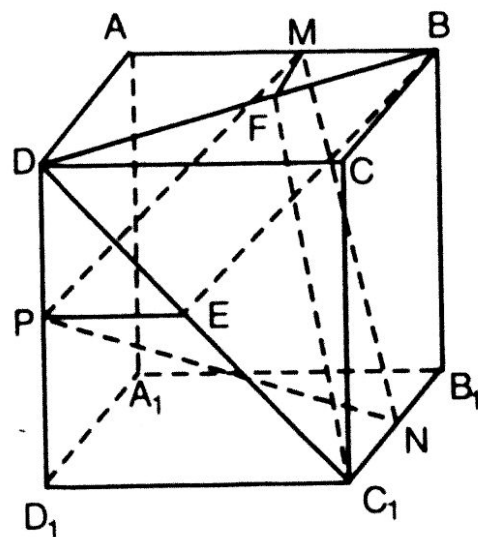
Do đó $PE \stackrel{//}{=} MB$

Vậy PEBM là hình bình hành. Suy ra $MP \parallel BE$. (1)

Tương tự gọi F là điểm giữa BD thì $MN \parallel C_1F$. (2)

Do (1) và (2) nên

$(MNP) \parallel (BDC_1)$.



Hình 15

§3. Tam giác vuông

a) Một số hệ thức thường dùng. Giả sử $\triangle ABC$ vuông tại A. Hạ đường cao AH, trung tuyến AM, ta có các hệ thức sau :

$$AM = \frac{1}{2} BC, \quad (1)$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (Định lý Pitago)}, \quad (2)$$

$$AH^2 = HB \cdot HC, \quad (3)$$

$$AB^2 = BH \cdot BC, \quad (4)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC. \quad (5)$$

Ngược lại, nếu $\triangle ABC$ có đường cao AH (H thuộc cạnh BC), trung tuyến AM thỏa mãn một trong các hệ thức trên thì sẽ là tam giác vuông tại A, và do đó, sẽ thỏa mãn cả các hệ thức còn lại.

Chú ý : a) (1) tương đương với : A nằm trên đường tròn đường kính BC.

b) Từ (4) suy ra $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \cdot BC}{CH \cdot BC} = \frac{BH}{CH}$.

c) Trong không gian, để chứng minh $\triangle ABC$ vuông tại A, ngoài cách chứng minh rằng tam giác đó phải thỏa mãn một trong các hệ thức của tam giác vuông, ta còn có thể chứng minh một cách, chẳng hạn AB, vuông góc với một mặt phẳng α có chứa cạnh còn lại.

Ví dụ 1. Hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. M là điểm giữa BC. AM cắt BD tại H. Chứng minh rằng $\triangle HAD$ là tam giác vuông.

Giải : Bạn đọc tự vẽ hình. Trong tam giác vuông ABD, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$. Trong tam giác vuông ABM có $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vì $BM \parallel \frac{1}{2} AD$, nên

$$\frac{HA}{HM} = \frac{HD}{HB} = \frac{AD}{BM} = 2. \text{ Từ đó suy ra}$$

$$HA = 2HM = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$HD = 2HB = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}. \text{ Vậy } HA^2 + HD^2 =$$

$$= \frac{6a^2}{9} + \frac{12a^2}{9} = 2a^2 = (a\sqrt{2})^2 = AD^2.$$

Do đó $\triangle HAD$ là tam giác vuông tại H.

Chú ý : Cũng có thể hạ đường cao HK của $\triangle HAD$, và chứng minh rằng $HK^2 = KA \cdot KD$ hoặc $HA^2 = AK \cdot AD$.

Ví dụ 2. Cho trên mặt phẳng P một đường tròn (O) tâm O, đường kính AB. Một điểm $C \in (O)$ và đoạn $DA \perp P$. Chứng minh rằng các mặt của tứ diện ABCD đều là tam giác vuông.

Giải : (hình 16). Điểm $C \in (O)$ nên $\triangle ABC$ vuông tại C.

Vì $DA \perp P$ nên các tam giác DAB , DAC vuông tại A . Hơn nữa ta có :

$DA \perp P$, nên $DA \perp BC$.

Mặt khác, $AC \perp BC$. Như vậy $BC \perp (DAC)$, tức là tam giác DBC vuông tại C . Do đó các mặt của tứ diện đều là tam giác vuông.

Ví dụ 3. Với giả thiết của ví dụ 2, kẻ các đường cao CH của $\triangle ABC$, AK của $\triangle DAC$. Chứng minh rằng $\triangle CHD$, $\triangle AKB$ là các tam giác vuông.

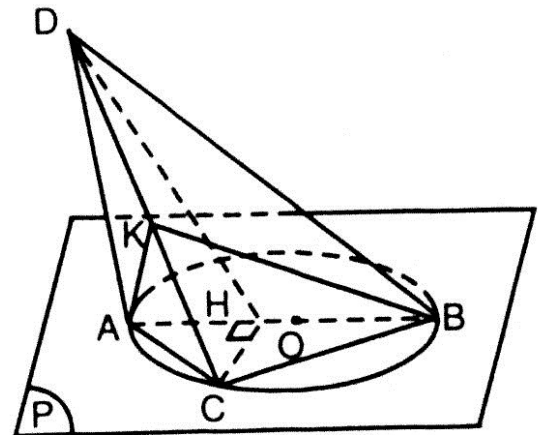
Giải : (hình 16). Vì $DA \perp P$ nên $CH \perp DA$. Mặt khác $CH \perp AB$. Do đó $CH \perp (DAB)$. Vậy $\triangle CHD$ là tam giác vuông tại H .

Theo chứng minh ở ví dụ trên $BC \perp (DAC)$, do đó $AK \perp BC$.

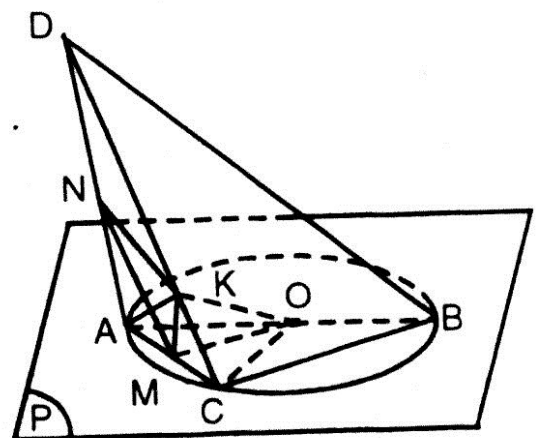
Mặt khác $AK \perp DC$. Do đó $AK \perp (BDC)$. Vậy $\triangle AKB$ là tam giác vuông tại K .

Ví dụ 4. Với giả thiết của ví dụ 3, M , N là điểm giữa các đoạn AC , DA . Chứng minh rằng các tam giác OMN , KMN , KNO đều là tam giác vuông.

Giải : (hình 17). Vì $BC \perp (DAC)$ và $OM \parallel BC$ nên $OM \perp (DAC)$, do đó $\triangle OMN$ vuông tại M .



Hình 16



Hình 17

KN là trung tuyến của tam giác KDA, nên $KN = NA$.

Tương tự $KM = MA$.

Suy ra $\triangle KMN = \triangle AMN$. Vì $\triangle AMN$ vuông tại A nên suy ra $\triangle KMN$ vuông tại K.

Theo chứng minh trên $OM \perp (DAC)$ nên $OM \perp NK$, mặt khác $KM \perp NK$. Suy ra $NK \perp (KOM)$. Vậy $\triangle KNO$ vuông tại K.

Ví dụ 5. M, N là điểm giữa các đoạn AC, CC_1 của hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Chứng minh rằng $\triangle A_1 D_1 N$, $\triangle A_1 M N$ là các tam giác vuông.

Giải : Hiển nhiên $A_1 D_1 \perp (DD_1 C_1 C)$ nên $\triangle A_1 D_1 N$ vuông tại D_1 . (Bạn đọc tự vẽ hình).

Gọi cạnh của hình lập phương là a.

Trong các tam giác vuông $A_1 D_1 N$, $D_1 C_1 N$ ta có :

$$\begin{aligned} A_1 N^2 &= A_1 D_1^2 + D_1 N^2 = A_1 D_1^2 + D_1 C_1^2 + C_1 N^2 \\ &= a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4}. \end{aligned}$$

Trong tam giác vuông $AA_1 M$:

$$A_1 M^2 = AA_1^2 + AM^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{6a^2}{4}.$$

Trong tam giác vuông CMN :

$$MN^2 = CN^2 + CM^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{3a^2}{4}.$$

$$\text{Vậy } A_1 M^2 + MN^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = \frac{9a^2}{4} = A_1 N^2.$$

Do đó $\triangle A_1 M N$ vuông tại M.

Ví dụ 6. Cho trên mặt phẳng α tam giác ABC vuông tại A, có $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Điểm H thuộc cạnh AC sao cho

$AH = 2HC$. Đoạn $SH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ vuông góc với α , I là điểm giữa đoạn BC.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp SABC là các tam giác vuông. Tính độ dài các đoạn SA, SB, SC.

b) Chứng minh rằng ΔSIA , ΔHIA là các tam giác vuông.

Giải : (hình 18). a) Dễ tính được

$$BC = 2a, AC = a\sqrt{3}.$$

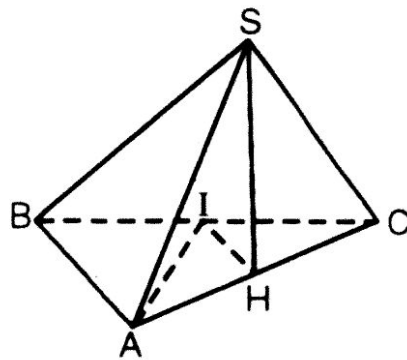
$$\text{Do đó } AH = 2HC =$$

$$= \frac{2}{3} AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3},$$

$$CH = \frac{1}{3} AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Vì $SH \perp AC$ và

$$AH \cdot CH = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{6a^2}{9} =$$



Hình 18

$$= \left(\frac{a\sqrt{6}}{3} \right)^2 = SH^2, \text{ nên } \Delta SAC \text{ vuông tại } S. \text{ Trong tam giác}$$

vuông này, ta có

$$SA^2 = AH \cdot AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = 2a^2; \text{ vậy : } SA = a\sqrt{2}.$$

$$SC^2 = CH \cdot CA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot a\sqrt{3} = a^2; \text{ vậy : } SC = a.$$

Vì $SH \perp \alpha$ nên $SH \perp AB$. Mặt khác $AC \perp AB$. Vậy $AB \perp (SAC)$. Do đó ΔASB vuông tại A. Trong tam giác vuông này ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Vì $SB = a\sqrt{3}$, $SC = a$, $BC = 2a$ nên dễ thấy ΔSBC là tam giác vuông tại S.

b) Trong tam giác vuông ABC ta có $AI = \frac{1}{2} BC = a$.

Tương tự $SI = a$ và vì $SA = a\sqrt{2}$ nên ΔSIA vuông tại I. Vì $SH \perp \alpha$, nên $AI \perp SH$. Mặt khác, $AI \perp IS$. Vậy $AI \perp (SIH)$. Do đó ΔHIA vuông tại I.

§4. Thể tích hình chóp

Để tính thể tích hình chóp cần tìm được độ dài đường cao của nó. Muốn tính được độ dài này, phải xác định rõ vị trí chân của đường cao trên đáy, chọn một tam giác thích hợp chứa đường cao đó, dùng các hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài đường cao. Trong các trường hợp sau đây có thể xác định được chân đường cao của hình chóp tương đối dễ dàng.

a) *Hình chóp có cạnh bên nghiêng đều trên đáy là hình chóp có các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.* Với loại hình chóp này ta có kết quả sau :

Bổ đề 1. Với hình chóp $SA_1A_2...A_n$, các điều kiện sau đây là tương đương :

- (1) Hình chóp có các cạnh bên nghiêng đều trên đáy.
- (2) Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau.
- (3) Đáy $A_1A_2...A_n$ là đa giác nội tiếp được và chân đường cao của hình chóp là tâm đường tròn ngoại tiếp của đáy.

b) *Hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy là hình chóp có các mặt bên lập với đáy các góc bằng nhau.* Tương tự như bổ đề 1. Ta có bổ đề sau :

Bổ đề 2. Với hình chóp $SA_1A_2...A_n$, các điều kiện sau đây là tương đương :

- (1) Hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy.

(2) Hình chóp có đường cao h của các mặt bên (xuất phát từ đỉnh S của hình chóp) bằng nhau.

(3) Đáy $A_1A_2...A_n$ là đa giác ngoại tiếp được và chân đường cao của hình chóp là tâm đường tròn nội tiếp của đáy.

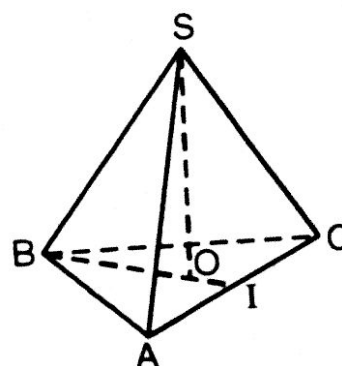
c) Nếu hình chóp có mặt bên hoặc mặt chéo vuông góc với đáy thì đường cao của hình chóp là đường cao của mặt bên hoặc mặt chéo đó.

Ví dụ 1. Hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác cân, cạnh đáy $BC = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$. Các cạnh bên nghiêng trên đáy một góc α . Tính thể tích hình chóp:

Giải : (hình 19). Gọi I là điểm giữa BC , ta có $AI \perp BC$ và $AI = IB \cotg \widehat{BAI} = \frac{a}{2} \cotg \frac{\alpha}{2}$,

do đó

$$\begin{aligned} s(ABC) &= \frac{1}{2} AI \cdot BC = \\ &= \frac{a^2 \cotg \frac{\alpha}{2}}{4}. \end{aligned} \quad (1)$$



Hình 19

Chân đường cao của hình chóp là tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Dễ thấy $O \in AI$. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Theo định lý hàm số sin, ta có $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2R$.

Do đó

(1) Khi $n = 3$, điểm đó cũng có thể sẽ là các đường tròn bàng tiếp của tam giác đáy.

$$OA = R = \frac{BC}{2\sin \widehat{BAC}} = \frac{a}{2\sin \alpha}$$

Trong tam giác vuông SOA, do $\widehat{SAO} = \alpha$ nên

$$h = SO = OA \operatorname{tg} \widehat{SAO} = \frac{a}{2\sin \alpha} \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2\cos \alpha} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$v(\text{SABC}) = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{a^3 \cotg \frac{\alpha}{2}}{24\cos \alpha}$$

Chú ý : a) Nếu hình bình hành nội tiếp được, thì đó là hình chữ nhật và tâm đường tròn ngoại tiếp nó là giao điểm của hai đường chéo.

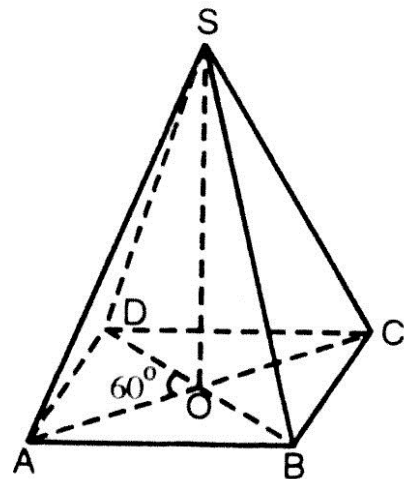
b) Nếu hình thang nội tiếp được thì đó là hình thang cân, tâm đường tròn ngoại tiếp sẽ nằm trên trục (đường nối điểm giữa hai cạnh đáy) của nó.

Ví dụ 2. Hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành, diện tích bằng $\sqrt{3}$ và góc giữa hai đường chéo của đáy bằng 60° . Các cạnh bên nghiêng đều trên đáy một góc 45° . Tính thể tích hình chóp.

Giải : (hình 20). Theo giả thiết, các cạnh bên nghiêng đều trên đáy nên ABCD phải là hình chữ nhật.

Đặt $AC = BD = x$.

Theo công thức tính diện tích tứ giác và theo giả thiết, ta có



Hình 20

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= s(ABCD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \widehat{DOA} = \frac{1}{2} x^2 \sin 60^\circ = \\ &= x^2 \frac{\sqrt{3}}{4}; \text{ từ đó } x = 2.\end{aligned}$$

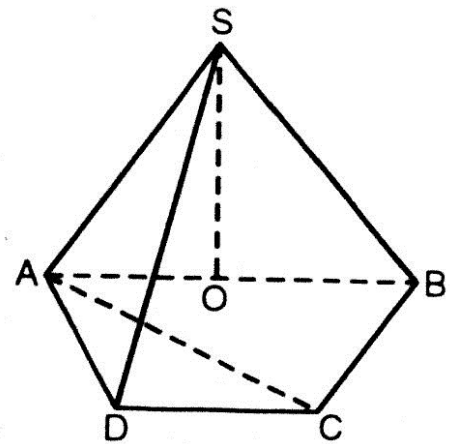
Gọi O là tâm của đáy, ta sẽ có SO là đường cao của hình chóp và $\widehat{SAO} = \widehat{SCO} = 45^\circ$. Vậy $\triangle SAC$ là tam giác vuông cân. Do đó

$$h = SO = \frac{1}{2} AC = 1. \text{ Vậy :}$$

$$v(SABCD) = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ví dụ 3. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình thang với đáy lớn $AB = 2$. Góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$. $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là các tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{3}$. Tính thể tích hình chóp.

Giải : (hình 21). Do các cạnh bên của hình chóp đều bằng $\sqrt{3}$, nên theo bổ đề trên, đáy $ABCD$ nội tiếp được. Vậy đáy là hình thang cân. Vì $\widehat{ACB} = 90^\circ$ nên $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AB , có tâm là điểm giữa O của đoạn này. Vậy $SO \perp (ABCD)$ và $h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2}$ (1).



Hình 21

Ta chứng minh một cách dễ dàng rằng $ABCD$ là một nửa hình lục giác đều có cạnh bằng 1.

Do đó :

$$s(ABCD) = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } v(\text{SABCD}) = \frac{1}{3} \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

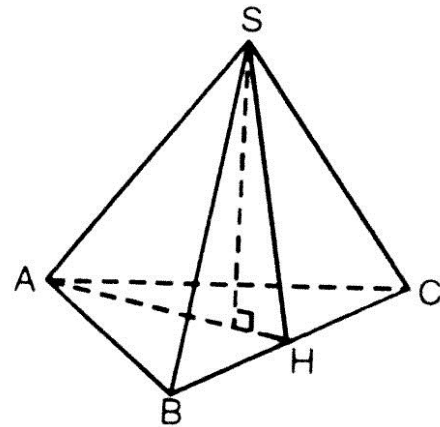
Ví dụ 4. Hình chóp tam giác có các cạnh đáy lần lượt là 5, 5, 6. Các mặt bên lập với đáy theo cùng một góc 45° . Tính thể tích hình chóp.

Giải : (hình 22). Gọi hình chóp đó là SABC ($BC = 6$) và H là điểm giữa BC. Khi đó $AH \perp BC$ và

$$AH = \sqrt{AC^2 - HC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\text{Vậy } s(\text{ABC}) = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 12. \quad (1)$$

Gọi p , r là nửa chu vi và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$, ta có :



Hình 22

$$p = \frac{1}{2} (5 + 5 + 6) = 8 \text{ và } r = \frac{s(\text{ABC})}{p} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Vì hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy, nên theo bổ đề 2, chân đường cao của nó là tâm I của đường tròn nội tiếp đáy. Vậy $I \in AH$ và $\widehat{SHI}$ là góc lập giữa các mặt bên (SBC) với đáy. Do đó $\widehat{SIH} = 45^\circ$. Vậy $\triangle AHI$ là tam giác vuông cân, và :

$$h = SI = r = \frac{3}{2}. \text{ Do đó :}$$

$$v(\text{SABC}) = \frac{1}{3} s \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \frac{3}{2} = 6$$

Chú ý : a) Diện tích của một đa giác ngoại tiếp quanh đường tròn bán kính r có thể tích bằng công thức $s = pr$, trong đó p là nửa chu vi của đa giác.

b) Nếu các mặt bên của hình chóp nghiêng đều trên đáy một góc α , thì diện tích xung quanh S_{xq} và diện tích toàn phần S_{tp} của nó có thể tính theo diện tích đáy S_d nhờ các công thức :

$$S_d = S_{xq} \cdot \cos \alpha, \quad S_{xq} = \frac{S_d}{\cos \alpha},$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) S_d = \frac{2S_d \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.$$

Ví dụ 5. Hình chóp SABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D. $\triangle SAD$ là tam giác đều có cạnh $2a$, cạnh $BC = 3a$. Các mặt bên lập với đáy các góc bằng nhau. Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình chóp.

Giải : (hình 23). Theo giả thiết và bổ đề 2, đáy ABCD sẽ ngoại tiếp được quanh một đường tròn. Gọi tâm và bán kính của nó là I, r.

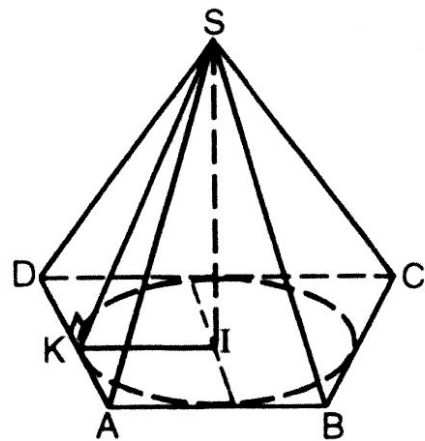
Ta có : $r = \frac{1}{2} AD = a$; hình chiếu K của I trên AD là điểm giữa của đoạn này. Vì $KI = r$, nên ta có :

$$h = SI = \sqrt{SK^2 - KI^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}. \quad (1)$$

Vì tứ giác ABCD ngoại tiếp được nên

$$AB + CD = AD + BC = 2a + 3a = 5a.$$

$$\text{Vậy } s(ABCD) = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 2a = 5a^2. \quad (2)$$



Hình 23

Từ (1) và (2) ta được :

$$v(\text{SABCD}) = \frac{1}{3} h \cdot s = \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot 5a^2 = \frac{5a^3\sqrt{2}}{3}$$

Góc nghiêng của các mặt bên trên đáy bằng góc $\widehat{\text{SKI}}$.

$$\text{Do đó } S_{xq} = \frac{S_d}{\cos \widehat{\text{SKI}}} = \frac{5a^2}{\frac{\text{KI}}{\text{SK}}} = \frac{5a^2}{\frac{a}{a\sqrt{3}}} = 5a^2\sqrt{3}.$$

Ví dụ 6. Đáy của hình chóp SABCD là hình thang với các cạnh $\text{AB} = \text{BC} = \text{CD} = (1/2)\text{AD}$. ΔSBD là tam giác vuông nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy có các cạnh của góc vuông $\text{SB} = 8a$, $\text{SD} = 15a$. Tính thể tích hình chóp.

Giải : (Bạn đọc tự vẽ hình !). Vì $(\text{SBD}) \perp (\text{ABCD})$, nên đường cao SH của ΔSBD cũng là đường cao của hình chóp. Tam giác SBD vuông tại S, nên $2s(\text{SBD}) = \text{SH} \cdot \text{BD} = \text{SB} \cdot \text{SD}$; từ đó

$$h = \text{SH} = \frac{\text{SB} \cdot \text{SD}}{\text{BD}} = \frac{\text{SB} \cdot \text{SD}}{\sqrt{\text{SB}^2 + \text{SD}^2}} = \frac{8a \cdot 15a}{17a} = \frac{120}{17} a \quad (1)$$

Từ giả thiết $\text{AB} = \text{BC} = \text{CD} = \frac{1}{2} \text{AD}$ dễ chứng minh được hình thang ABCD là một nửa hình lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD. Do đó tam giác ABD vuông tại B và có $\widehat{\text{BAD}} = 60^\circ$.

$$\text{Vậy } \text{AD} = \frac{\text{BD}}{\sin \widehat{\text{BAD}}} = \frac{17a}{\sqrt{3}} = \frac{34a\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{AB} = \text{BC} = \text{CD} = \frac{1}{2} \text{AD} = \frac{17a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } s(\text{ABCD}) &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \text{AB}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{17a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{17^2 \cdot a^2\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

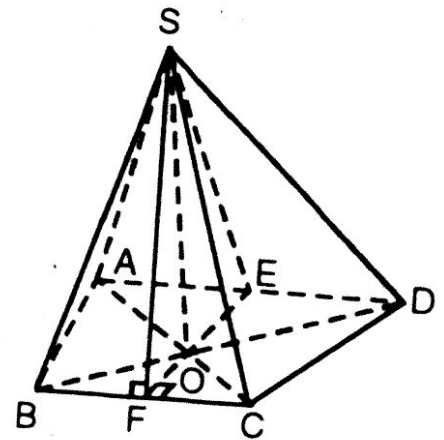
Từ (1) và (2) ta có

$$v(\text{SABCD}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{120a}{17} \cdot \frac{17^2 \cdot a^2 \sqrt{3}}{4} = 170a^3 \sqrt{3}.$$

Chú ý : Nếu cả mặt bên và mặt chéo của hình chóp cùng vuông góc với đáy thì đường cao của hình chóp sẽ nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng này.

Ví dụ 7. Hình chóp SABCD có đáy là hình thang cân với các đáy $AD = a$, $BC = b$ ($a > 2b$), góc giữa hai đường chéo của đáy là α . Các mặt phẳng (SAC), (SBD) vuông góc với đáy. Góc nhị diện BC bằng hai lần góc nhị diện cạnh AD. Tính thể tích hình chóp.

Giải : (hình 24). Gọi E, F là điểm giữa các đoạn AD, BC, O là giao điểm của AC và BD. Ba điểm E, O, F sẽ thẳng hàng. Giả sử $\angle AOB = \alpha$. Khi đó $\triangle OAD$ và $\triangle OBC$ là các tam giác cân tại O, có các góc ở đáy là $\alpha/2$. Do đó



Hình 24

$$OE = EA \cdot \tan \widehat{EAO} = \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$OF = FB \cdot \tan \widehat{FBO} = \frac{b}{2} \tan \frac{\alpha}{2},$$

$$EF = OE + OF = \frac{a+b}{2} \tan \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Vì (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy nên giao tuyến SO của chúng là đường cao của hình chóp. Ta thấy rằng : $\widehat{SEO}$

và $\widehat{SFO}$ là góc lập bởi các mặt (SAD) và (SBC) với đáy. Theo giả thiết ta có $\widehat{SEO} = (1/2) \widehat{SFO}$.

Đặt $\widehat{SEO} = \beta$. Ta có : trong ΔSOF :

$$SO = OF \cdot \operatorname{tg} \widehat{SFO} = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\beta, \quad (2)$$

$$\text{trong } \Delta SOE : SO = OE \cdot \operatorname{tg} \widehat{SEO} = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} 2\beta = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

$$\text{hay} \quad a \operatorname{tg} \beta = b \operatorname{tg} 2\beta = b \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

$$\text{Từ đó suy ra : } \operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{a - 2b}{a}}. \quad (4)$$

Thay (4) vào (3) ta được :

$$h = SO = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a - 2b)}. \quad (5)$$

Từ (1) và (5) suy ra :

$$\begin{aligned} v(\text{SABCD}) &= \frac{1}{3} h \cdot s = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a - 2b)} \times \\ &\quad \times \frac{(a + b)^2}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{hay } v(\text{SABCD}) = \frac{(a + b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a - 2b)}. \quad (6)$$

Chú ý : Nếu $\widehat{BOC} = \alpha$ là góc giữa hai đường chéo AC và BD thì $\widehat{AOB} = 180^\circ - \alpha$ và $\frac{\widehat{AOB}}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Khi đó, trong (6), ta chỉ cần thay $\frac{\alpha}{2}$ bởi $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ và được :

$$v(\text{SABCD}) = \frac{(a + b)^2}{24} \cotg^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{a(a - 2b)}.$$

BÀI TẬP

CHƯƠNG I

1. Cho lăng trụ $OABO_1A_1B_1$. Gọi K, M, N, E lần lượt là điểm giữa các đoạn BB_1, OA, OO_1, AA_1 ; G là trọng tâm $\triangle OAB$. Điểm I thuộc đoạn AB sao cho $AI = (1/3)AB$.

Chứng minh rằng $(NGB) \parallel (O_1AK)$, $(MNK) \parallel (O_1AB_1)$, $(GKN) \parallel (O_1B_1I)$, $(AGK) \parallel (OB_1E)$.

2. Cho hình hộp $ABCD A_1B_1C_1D_1$. M, N, P là điểm giữa các đoạn BC, C_1D_1, AA_1 .

a) Chứng minh rằng $(ACB_1) \parallel (A_1C_1D)$. Dụng các giao điểm I, K của BD_1 với hai mặt phẳng đó. Chứng minh rằng I, K là trọng tâm các tam giác ACB_1, A_1C_1D , đồng thời $BI = IK = KD_1$.

b) Dụng giao điểm E của BD_1 với mặt phẳng (AMB_1) .

Chứng minh rằng $BE = \frac{1}{4} BD_1$.

c) Dụng giao tuyến của mặt phẳng (B_1MN) với các mặt $(A_1B_1C_1D_1), (ACC_1A_1)$. Dụng giao điểm H của C_1P với mặt (B_1MN) . Tính tỷ số $\frac{HC_1}{HP}$.

d) Dụng giao điểm F của DB_1 với mặt (MNP) . Chứng minh rằng F là điểm giữa đoạn DB_1 và là trọng tâm $\triangle MNP$.

3. Cho tứ diện $ABCD$:

a) M là một điểm nằm trong tứ diện, các đường thẳng AM, BM, CM, DM cắt các mặt đối diện tương ứng tại A_1, B_1, C_1, D_1 . Biết A_1 , hãy dụng các điểm B_1, C_1, D_1 .

Chứng minh rằng giá trị của tổng

$$\frac{AM}{AA_1} + \frac{BM}{BB_1} + \frac{CM}{CC_1} + \frac{DM}{DD_1}$$

không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Tính giá trị đó.

b) N là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua N, song song với DA, DB, DC tương ứng cắt các mặt (DBC), (DCA), (DAB) tại A_2, B_2, C_2 . Chứng minh rằng tổng

$$\frac{NA_2}{DA} + \frac{NB_2}{DB} + \frac{NC_2}{DC}$$
 có giá trị không đổi. Tính giá trị đó.

c) DN cắt mặt $(A_2B_2C_2)$ tại G. Tính tỷ số $\frac{GD}{GN}$. Chứng minh rằng G là trọng tâm $\Delta A_2B_2C_2$.

4. Hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp đều bằng $a\sqrt{2}$.

a) M, N là điểm giữa các đoạn AB, CD. Chứng minh rằng ΔSMN là tam giác đều.

b) E, F là điểm giữa SC, SD. Chứng minh rằng $SN \perp (MEF)$.

c) Chứng minh rằng các tam giác $\Delta SAB, \Delta SCD, \Delta NAB, \Delta EAB, \Delta FAB$ là các tam giác vuông.

5. Hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ có cạnh bằng a. Các điểm M, N, K lần lượt nằm trong các đoạn $AA_1, D_1 C_1, CC_1$ đồng thời $A_1 M = \frac{a\sqrt{3}}{2}, D_1 N = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Đường thẳng d qua K song song với MN bị hình lập phương chắn mất một đoạn. Tính độ dài đoạn thẳng đó.

6. Hình chóp SABC có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$.

a) Chứng minh rằng ΔABC là tam giác vuông.

b) Tính thể tích hình chóp SABC.

7. Cho tam giác vuông ABC ($A = 1v$) có $C = \alpha$. Trên cạnh BC lấy một điểm H. Từ H dựng nửa đường thẳng vuông góc với mặt (ABC) và trên đó ta chọn điểm S sao cho mặt SAB hợp với mặt (ABC) góc α , mặt (SAC) hợp với mặt (ABC) góc $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

1) Tính tỷ số $\frac{CH}{BH}$ theo α .

2) Tính thể tích hình chóp SABC theo α và cạnh $BC = a$.

8. Hình chóp SABCD có $AB = AD = 3a$, $CB = CD = 4a$, $AC = 5a$. Đường cao SH của hình chóp có độ dài $\frac{9a}{7}$ và điểm H thuộc đoạn AC, sao cho $AH = \frac{15a}{7}$.

a) Tính thể tích hình chóp.

b) Chứng minh rằng hình chóp có các mặt bên nghiêng đều trên đáy. Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

c) Chứng minh rằng điểm H cách đều các mặt bên của hình chóp. Tính khoảng cách đó.

9. Đáy của hình chóp là hình chữ nhật. Một mặt bên nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy là tam giác vuông với góc vuông tại đỉnh của hình chóp và một góc nhọn bằng α . Mặt bên đối diện với mặt đó lập với đáy một góc bằng $90^\circ - \alpha$. Tổng hai đường cao hạ từ đỉnh hình chóp của hai mặt này bằng m . Tính thể tích hình chóp và tổng diện tích hai mặt bên còn lại.

10. Hình chóp SABCD có đáy là hình chữ nhật, $\triangle SCD$ là tam giác cân tại S nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. Tam giác

SAB có $SA = a$, $\widehat{ASB} = 2\alpha$, nằm trên mặt phẳng lập với mặt (SCD) một góc α . Tính thể tích hình chóp.

11. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là một hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Một mặt phẳng P vuông góc với AC tại E và chia đôi thể tích của hình chóp. Tính tỷ số $EA : EC$.

12. Cho hình chóp đều SABCD, M là điểm giữa của SD ; N trên DA kéo dài về phía A sao cho $AN = AD$; P trên DC kéo dài về phía C sao cho $CP = CD$. Gọi E là giao điểm của MN với SA ; F là giao điểm của MP với SC.

a) Tính các tỷ số $\frac{ME}{MN}$, $\frac{MF}{MP}$.

b) Chứng minh $EF \parallel AC \parallel NP$.

c) Giả sử $\triangle MNP$ đều, cạnh a , tính thể tích của hình chóp đã cho.

CHƯƠNG II

THIỆT DIỆN CỦA KHỐI ĐA DIỆN

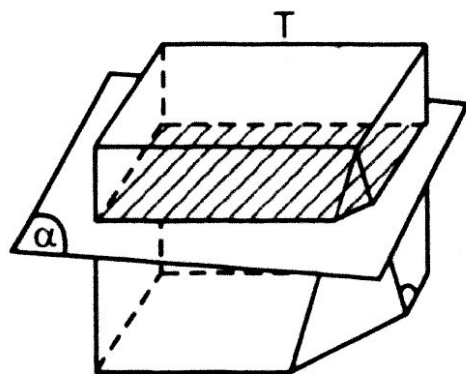
§0. Thiết diện là gì ?

Cắt khối đa diện (T) bằng một mặt phẳng P. Phần mặt phẳng của P thuộc T được giới hạn bởi các giao tuyến sinh ra do P cắt một số mặt của (T) gọi là thiết diện hay mặt cắt.

Thiết diện của (T) với P là một đa giác có số cạnh không vượt quá số mặt của (T). Nếu (T) là lồi thì thiết diện (mặt cắt) là đa giác lồi.

§1. Dụng thiết diện

Cho trước khối đa diện T và mặt phẳng α . Nếu α có điểm chung với T thì α sẽ cắt một số mặt của T theo các đoạn thẳng. Phần mặt phẳng α giới hạn bởi các đoạn đó thường là một đa giác, gọi là *mặt cắt*⁽¹⁾ giữa t và α (hình 25).



Hình 25

Mục đích của chương này là đưa ra một vài cách dựng mặt cắt khi đã biết T , α và giải một số bài toán có liên quan đến mặt cắt.

Cần chú ý hai điều sau :

a) Dựng mặt cắt là bài toán dựng hình, nhưng chỉ cần trình bày phần cách dựng và phần biện luận (nếu có).

b) Đỉnh của mặt cắt là giao điểm của α với các cạnh của T . Cạnh của mặt là các đoạn giao tuyến của α với các mặt của t . Do đó, *thực chất của việc dựng mặt cắt là giải bài toán dựng giao điểm giữa đường thẳng với mặt phẳng và dựng giao tuyến giữa hai mặt phẳng* (xem §1, chương I).

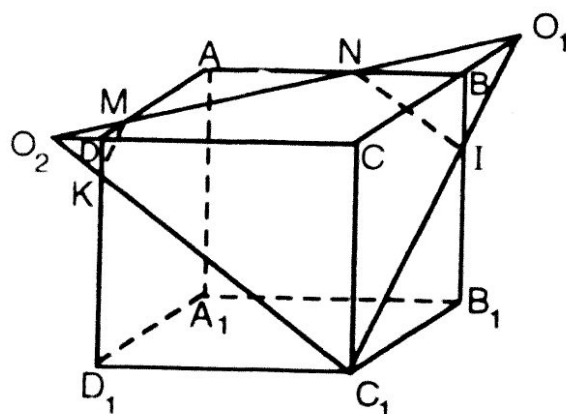
1. *Phương pháp giao tuyến gốc.* Để dựng mặt cắt giữa T và α , trước tiên hãy tìm cách xác định giao tuyến của α với một mặt phẳng chứa một mặt của T . Trên mặt phẳng này, lấy giao điểm của giao tuyến vừa tìm được với các đường thẳng chứa cạnh của T . Từ các giao điểm mới tìm được sẽ dựng được giao tuyến của α với các mặt khác của T . Với các giao tuyến này lại lặp lại quá trình trên cho đến khi tìm ra mặt cắt.

(1) Mặt cắt còn được gọi là thiết diện.

Giao tuyến đầu tiên giữa α với một mặt của T gọi là giao tuyến gốc, vì từ giao tuyến đó ta sẽ dựng được các giao tuyến khác.

Cách dựng trên đây thường được dùng khi mặt phẳng α được cho dưới dạng tường minh, tức là cho bởi 3 điểm không thẳng hàng, hay cũng vậy, bởi hai đường thẳng cắt nhau hoặc hai đường thẳng song song.

Ví dụ 1. Các điểm M, N nằm trong các cạnh AD, AB của hình hộp $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Dựng mặt cắt giữa hình hộp và mặt phẳng α đi qua ba điểm M, N, C_1 .



Hình 26

Giải : α cắt mặt (ABCD) theo giao tuyến MN. Gọi O_1 , O_2 là giao điểm của đường thẳng MN với các đường CB, CD, α cắt mặt (BCC₁B₁) theo giao tuyến O_1C_1 và mặt (CDD₁C₁) theo giao tuyến O_2C_1 .

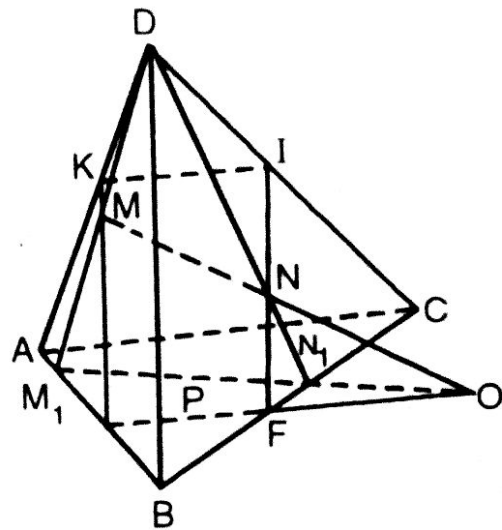
Lấy giao điểm I của O_1C_1 với BB_1 và giao điểm K của O_2C_1 với DD_1 . Ngũ giác INMKC₁ là mặt cắt cần dựng (hình 26).

Chú ý : Trường hợp giao tuyến gốc chưa tìm thấy ngay, thì để dựng nó, thường phải giải bài toán phụ : tìm giao điểm giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Ví dụ 2. Các điểm M, N, P lần lượt nằm trong các tam giác DAB, DBC và ABC. Dựng mặt cắt giữa tứ diện ABCD với mặt phẳng $\alpha = (MNP)$ (¹).

(1) Mặt phẳng α đi qua ba điểm M, N, P sẽ được ký hiệu là $\alpha = (MNP)$. Mặt phẳng α đi qua điểm A và đường thẳng m sẽ được ký hiệu là $\alpha = (A, m)$.

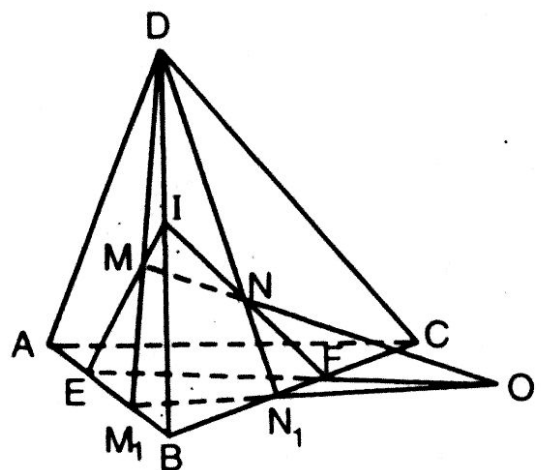
Giải : Chưa có giao tuyến nào giữa α và mặt của tứ diện thấy ngay được. Do đó, ta phải dựng một trong chúng, α có chung với mặt (ABC) điểm P. Muốn tìm thêm một điểm chung nữa của chúng, ta tìm giao điểm O của đường MN với (ABC).



Hình 27

DM cắt AB tại M_1 . DN cắt BC tại N_1 . Mặt phẳng (DM_1N_1) chứa MN cắt (ABC) theo giao tuyến M_1N_1 , nên giao điểm O của MN với M_1N_1 là giao điểm của MN với mặt (ABC). Giao tuyến gốc cần dựng là OP. Tùy theo vị trí tương đối giữa OP và ΔABC mà mặt cắt cần dựng sẽ là tứ giác EFIK (hình 27) hoặc tam giác EFI (hình 28).

Nếu $MN \parallel M_1N_1$ thì $\alpha \parallel M_1N_1$ và giao tuyến gốc sẽ là đường thẳng qua P, song song với M_1N_1 . Bạn đọc nên tự dựng mặt cắt trong trường hợp này.

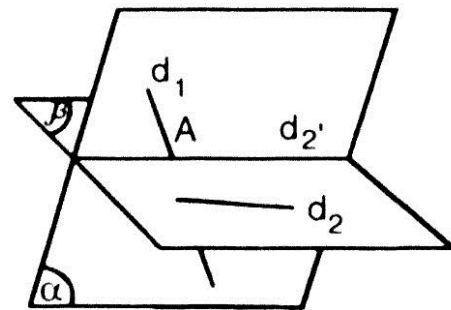


Hình 28

2. Mặt phẳng α được cho bởi các tính chất song song.

a) α đi qua đường thẳng d_1 và song song với d_2 , chéo nhau với d_1 . Lúc này, trên α mới có một đường thẳng d_1 đã biết. Ta

cần dựng được một đường thẳng cắt d_1 và song song với d_2 . Đường này thường được dựng như sau : Chọn một mặt phẳng β có chứa d_2 sao cho giao điểm A của d_1 với β có thể dựng được ngay. Trong mặt phẳng β dựng đường thẳng d_2' qua A song song với d_2 , α sẽ là mặt phẳng chứa d_1 và d_2 (hình 29).

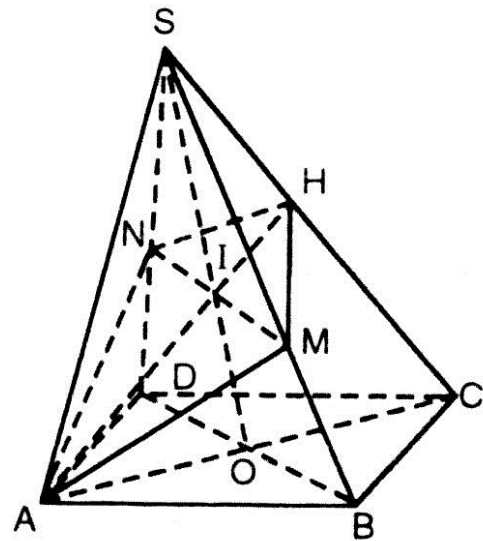


Hình 29

Ví dụ 3. Điểm H nằm trong cạnh SC của hình chóp tứ giác SABCD. Dựng mặt cắt giữa hình chóp và mặt phẳng α đi qua AH, song song với BD.

Giải : Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường AH cắt mặt (SBD) tại giao điểm I của AH và SO. Đường thẳng qua I, song song với BD sẽ thuộc mặt phẳng α .

Gọi M, N là giao điểm của đường đó với SB, SD, tứ giác AMHN là mặt cắt cần dựng (hình 30).



Hình 30

b) α đi qua một điểm M, song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 .

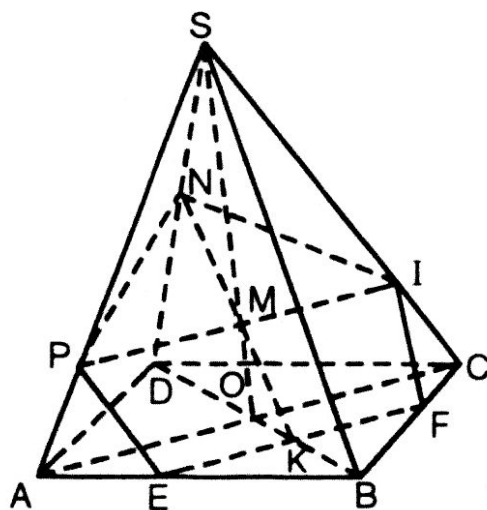
Để dựng α , trước tiên hãy xét hai mặt phẳng $(M, d_1), (M, d_2)$. Trong mỗi mặt phẳng này dựng một đường thẳng qua M, song song với d_1, d_2 . Khi đó α là mặt phẳng chứa hai đường thẳng vừa dựng.

Ví dụ 4. Hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. M là trọng tâm tam giác SBD. Dựng mặt cắt giữa hình chóp và mặt phẳng α qua M, song song với SB, AC.

Giải : Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do ABCD là hình bình hành nên trọng tâm M của $\triangle SBD$ nằm trên SO. Mặt phẳng (M, SB) là mặt phẳng (SBD). Trong mặt phẳng này, đường thẳng qua M, song song với SB sẽ cắt SD tại N, DB tại K.

Do $M \in SO$ nên mặt phẳng (M, AC) là mặt phẳng (SAC). Do đó đường thẳng qua M, song song với AC sẽ cắt SA tại P, SC tại I. Vậy α là mặt phẳng chứa hai đường NK, PI. Mặt phẳng này có chung với đáy ABCD điểm K và song song với AC nên cắt đáy theo giao tuyến qua K và song song với AC. Giao tuyến đó cắt AB tại E, BC tại F. Ngũ giác EFINP là mặt cắt cần dựng (hình 31).



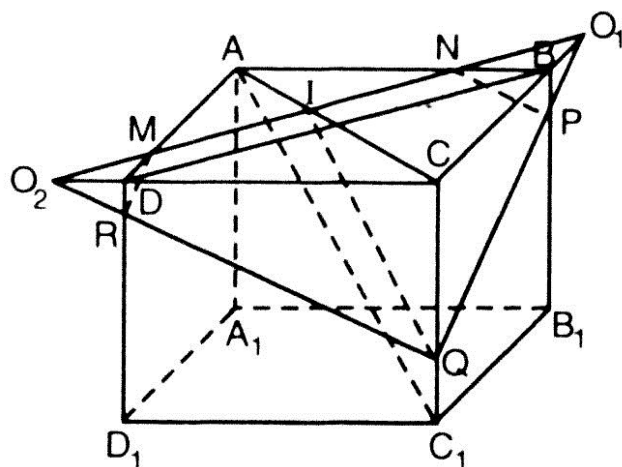
Hình 31

Chú ý : Nếu mặt phẳng (M, d_2) khó xác định, thì ta chỉ cần xét mặt phẳng (M, d_1). Trong mặt phẳng này dựng đường d_1 đi qua M, song song với d_1 , α sẽ là mặt phẳng đi qua d_1 , song song với d_2 . Mặt cắt dựng như trong phần a).

Ví dụ 5. Điểm M thuộc đoạn AD. Dựng mặt cắt giữa hình hộp ABCD.A₁B₁C₁D₁ và mặt phẳng α qua M, song song với BC và AC₁.

Giải : Mặt phẳng (M, BD) là mặt ABCD còn mặt (M, AC₁) khó xác định hơn. Vậy ta chỉ cần mặt (M, BD). α cắt mặt (ABCD)

theo giao tuyến qua M, song song với BD. Giao tuyến này cắt các đường AB, CB, CD tại N, O_1 , O_2 . α sẽ là mặt phẳng qua O_1 , O_2 , song song với AC_1 . O_1O_2 cắt AC tại I. α sẽ cắt mặt (ACC_1A_1) (chứa đường AC_1) theo giao tuyến qua I song song với AC_1 . Giao tuyến



Hình 32

này cắt CC_1 tại Q. QO_1 cắt BB_1 tại P. QO_2 cắt DD_1 tại R. Ngũ giác MNPQR là mặt cắt cân dựng (hình 32).

3. Mặt phẳng α được cho bởi các tính chất vuông góc.

a) α đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng a. Dùng kết quả : "Nếu mặt phẳng α và đường thẳng d cùng vuông góc với đường thẳng a thì $d \parallel \alpha$ hoặc d nằm trong α ", ta khôi phục mặt phẳng α bằng cách sau : Tìm hai đường thẳng d_1 , d_2 cùng vuông góc với a, α sẽ là mặt phẳng qua M, song song với d_1 , d_2 hoặc chứa một trong chúng và song song với đường còn lại.

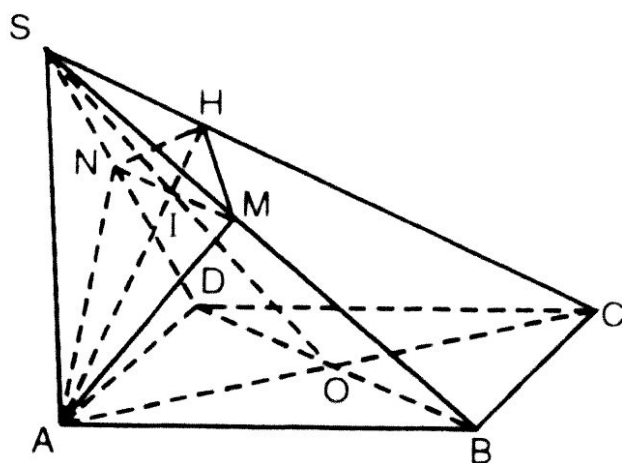
Ví dụ 6. Hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông. SAB là tam giác đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy. M là trọng tâm $\triangle BCD$. α là mặt phẳng qua M, vuông góc với AB, β là mặt phẳng qua M vuông góc với CI (I là điểm giữa đoạn AB). Dựng mặt cắt giữa hình chóp và các mặt phẳng α , β .

Giải : a) Từ giả thiết, thấy ngay $BC \perp AB$ và $SI \perp AB$. Vậy α là mặt phẳng qua M, song song với BC và SI. Mặt cắt dựng

$$\frac{HS}{HC} = \frac{SA^2}{CA^2} = \frac{a^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$$

H là điểm chia đoạn SC theo tỷ số $\frac{1}{2}$ và ta dựng được điểm H này. Do (1) nên α là mặt phẳng qua AH, song song với BD. Mặt cắt dựng như trong ví dụ 3, và là tứ giác AMHN (hình 35).

b) α đi qua đường thẳng d_1 , và vuông góc với mặt phẳng β đã cho (d_1 xiên góc với β).

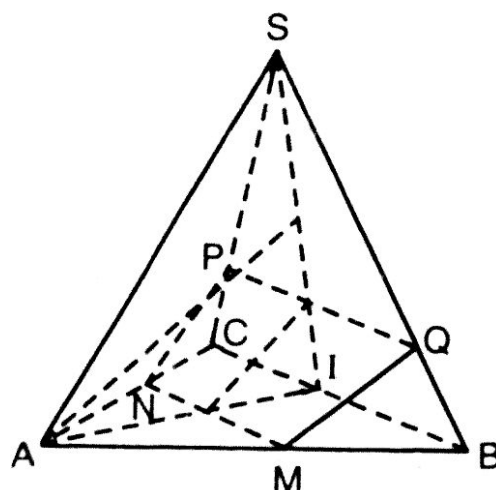


Hình 35

Sử dụng kết quả : "Nếu mặt phẳng α và đường thẳng d_2 cùng vuông góc với mặt phẳng β thì hoặc $\alpha \parallel d_2$, hoặc phải chứa d_2 " ta dựng mặt phẳng α bằng cách : tìm một đường thẳng d_2 vuông góc với β , α sẽ là mặt phẳng chứa d_1 , song song với d_2 , hoặc phải chứa d_1 và d_2 .

Ví dụ 8. Hình chóp tam giác đều SABCD có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. M, N là điểm giữa các cạnh AB, AC. Dựng mặt cắt giữa hình chóp và mặt phẳng α đi qua MN, vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Giải : Lấy I là điểm giữa BC và H là điểm giữa SI (hình 36).



Hình 36

Do $SABC$ là hình chóp đều nên $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$. (1)

Trong tam giác đều ABC :

$$AI = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Vậy $AI = AS$. Suy ra ASI là tam giác cân, và $SI \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$. Vậy α là mặt phẳng qua MN , song song với AH . Mặt cắt dựng theo phần 2.a), và là hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ \parallel BC$). Hình 36, E là điểm giữa AI , $EF \parallel AH$ ($F \in SI$).

§2. Diện tích mặt cắt

1. *Khi mặt cắt là tứ giác.* Diện tích của nó thường được tính theo trình tự sau : xác định hình dạng mặt cắt, lập công thức tính thích hợp và tính các đại lượng (độ dài đoạn thẳng, giá trị góc,...) có mặt trong công thức đó.

Ví dụ 1. Tính diện tích mặt cắt trong ví dụ 8 §1.

Giải : (hình 36). Do $MN \parallel BC$, nên $PQ \parallel BC$. Do đó mặt cắt là hình thang. Do $SABC$ là hình chóp đều nên dễ thấy đó là hình thang cân, có đường cao là $EF \parallel AH$. Vậy⁽¹⁾

$$S_{mc} = \frac{1}{2} (MN + PQ) \cdot EF, \quad (1)$$

$$MN = \frac{1}{2} BC = 1. \quad (2)$$

Trong $\triangle AHI$, EF là đường trung bình nên :

$$IF = \frac{1}{2} IH = \frac{1}{4} IS.$$

$$\text{Suy ra : } SF = \frac{3}{4} SI \text{ và } PQ = \frac{3}{4} BC = \frac{3}{2}. \quad (3)$$

(1) Ký hiệu S_{mc} dùng để chỉ diện tích mặt cắt. Còn diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ sẽ được ký hiệu là $s(A_1A_2...A_n)$.

Trong ΔSIB : $SI^2 = SB^2 - BI^2 = 2$.

Trong ΔSHA : $AH^2 = SA^2 - SH^2 = SA^2 - \frac{1}{4} SI^2 = 3 - \frac{1}{2}$.

Vậy : $AH = \frac{\sqrt{10}}{2}$

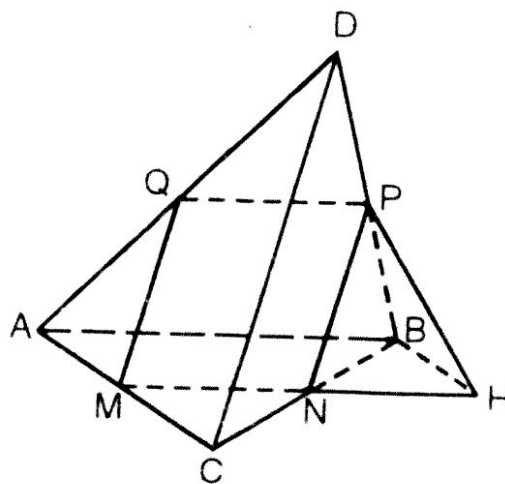
và $EF = \frac{1}{2} AH \frac{\sqrt{10}}{4}$ (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) :

$$S_{mc} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{5\sqrt{10}}{16}$$

Ví dụ 2. Tứ diện ABCD có ABC là tam giác vuông tại A, $AC = b$, $BC = a$. Cạnh DB = h, vuông góc với mặt phẳng (ABC). M, N là điểm giữa các đoạn AC, BC. Tính diện tích mặt cắt giữa tứ diện và mặt phẳng α đi qua MN, song song với DC.

Giải : (hình 37). Do $\alpha \parallel CD$ nên giao tuyến của α với các mặt phẳng (ACD) và (BCD) là MQ, NP ($Q \in AD$, $P \in BD$) đều song song với DC. Do đó $MQ \parallel NP$.



Do $MN \parallel AB$ nên giao tuyến PQ của α với (ABD) cũng $\parallel AB$. Suy ra $MN \parallel PQ$. Vậy mặt cắt MNPQ là hình bình hành, có đáy :

Hình 37

$$MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \sqrt{BC^2 - AC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (1)$$

Hạ đường cao PH của hình bình hành MNPQ. Do $PB \perp (ABC)$ nên theo định lý ba đường vuông góc, ta có $BH \perp MN$. Vậy ABHM

là hình chữ nhật và $BH = AM = \frac{1}{2} AC = \frac{b}{2}$.

Trong tam giác vuông PBH :

$$PH = \sqrt{PB^2 + BH^2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + b^2}. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } S_{mc} &= MN \cdot PH = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + b^2} = \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 - b^2)(h^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Chú ý : Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo lập với nhau một góc θ , thì diện tích của nó có thể tính bằng công thức :

$$s = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \theta.$$

Do đó, nếu $AC \perp BD$ thì công thức trên trở thành $s = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Cho nên, tuy việc xét tính vuông góc của hai đường chéo không nằm trong bài toán xác định hình dạng tứ giác, nhưng lại quan trọng khi cần tính diện tích của nó.

Ví dụ 3. Tính diện tích mặt cắt trong ví dụ 7 §1.

Giải : (hình 35, §1). Mặt cắt là tứ giác AMHN có $MN \parallel BD$, mà $BD \perp (SAC)$ nên $MN \perp (SAC)$ suy ra $MN \perp AH$.

$$\text{Vậy} \quad S_{mc} = \frac{1}{2} AH \cdot MN. \quad (1)$$

Vì AH là đường cao của tam giác vuông SAC nên :

$$AH = \frac{SA \cdot AC}{SC} = \frac{SA \cdot AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (2)$$

Kẻ $OK \parallel AH$ ($K \in SC$). OK là đường trung bình của $\triangle AHC$ nên $CK = KH = \frac{1}{3} SC$. Do đó $CK = KH = HS$.

Vậy IH là đường trung bình của ΔSOK (hình 38) nên I là điểm giữa SO. Từ đây suy ra MN là đường trung bình của ΔSBD và

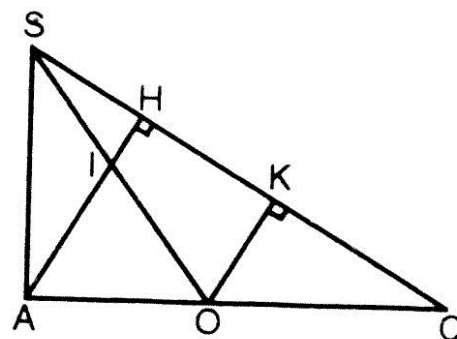
$$MN = \frac{1}{2} BD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1).

$$S_{mc} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

2. Trường hợp chung⁽¹⁾. Để tính diện tích mặt cắt có thể dùng một trong các cách sau :

a) Bổ sung bao, quanh mặt cắt một số tam giác để nhận được một tam giác hoặc tứ giác để tính được diện tích. Hiệu số giữa diện tích đó với tổng diện tích các tam giác bổ sung sẽ cho diện tích mặt cắt.



Hình 38

b) Phân chia mặt cắt thành một số tam, tứ giác. Tính diện tích từng đa giác nhỏ đó và cộng lại.

c) Áp dụng định lý : Hai mặt phẳng α, β lập với nhau một góc θ . Một đa giác thuộc mặt phẳng α có diện tích S thì diện tích S' của hình chiếu của nó trên β sẽ được tính bởi công thức :

$$S' = S \cdot \cos\theta.$$

Trong khi giải loại toán này thường dùng đến hai kết quả sau :

(1) Kể cả khi mặt cắt là tam giác, hoặc tứ giác không có hình dạng đặc biệt.

Kết quả 1. Với điểm A, A' nằm trên Ox, B, B' nằm trên Oy, luôn có :

$$\frac{s(OAB)}{s(OA'B')} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'}$$

Chứng minh : (Hình 39)

$$\frac{s(OAB)}{s(OA'B')} = \frac{\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB}}{\frac{1}{2} OA' \cdot OB' \cdot \sin \widehat{A'OB'}} = \frac{OA}{OA'} \cdot \frac{OB}{OB'}$$

Kết quả 2. Tứ diện SABC có góc tam diện tại đỉnh S là tam diện vuông⁽¹⁾. Đặt :

$$SA = a, SB = b, SC = c.$$

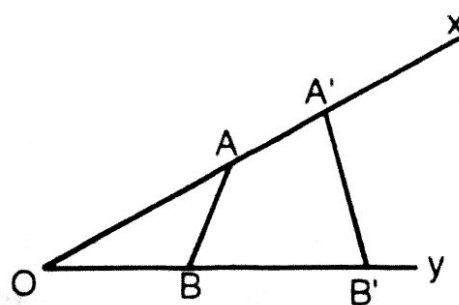
Khi đó :

$$s(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

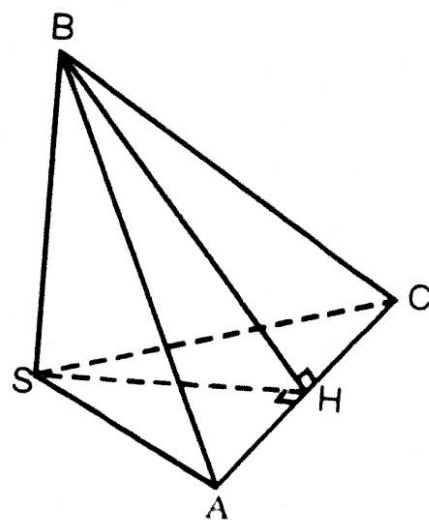
Chứng minh : Kẽ đường cao BH của ΔABC . Do $SB \perp (SAC)$ nên theo định lý ba đường vuông góc : $SH \perp AC$ (hình 40).

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông tại S : SBH, SAC và công thức tính diện tích cho các tam giác ABC và ASC, ta có :

$$s^2(ABC) = \frac{1}{4} AC^2 \cdot BH^2 =$$



Hình 39



Hình 40

(1) Tức là ba đường SB, SA, SC từng đôi một vuông góc với nhau.

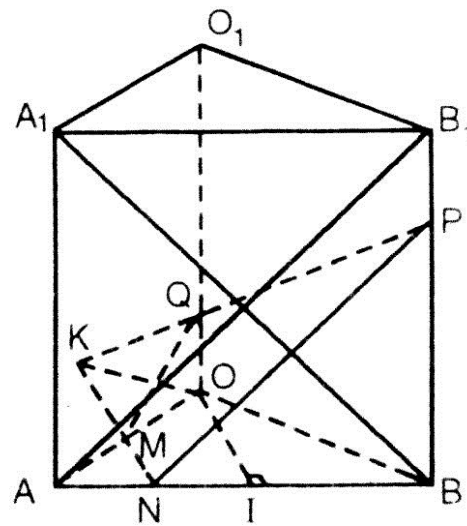
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} AC^2(SB^2 + SH^2) = \frac{1}{4} AC^2 \cdot SB^2 + \left(\frac{1}{2} AC \cdot SH\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4} (SA^2 + SC^2) \cdot SB^2 + \left(\frac{1}{2} SC \cdot SA\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4} (SA^2 \cdot SB^2 + SB^2 \cdot SC^2 + SC^2 \cdot SA^2).
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } s(ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

Ví dụ 4. Lăng trụ đứng $OABO_1A_1B_1$ có đáy là tam giác vuông, $OA = OB = a$, $AA_1 = a\sqrt{2}$. M là điểm giữa OA . Tính diện tích mặt cắt giữa lăng trụ và mặt phẳng α qua M , vuông góc với A_1B .

Giải : Tam giác vuông OAB có $OA = OB = a$ nên phải vuông tại O và $AB = a\sqrt{2}$. Gọi I là điểm giữa AB . Dễ thấy $OI \perp (ABB_1A_1)$, nên $OI \perp A_1B$. (1)

Do ABB_1A_1 là hình vuông nên $AB_1 \perp A_1B$. (2) Từ (1), (2) suy ra α là mặt phẳng qua M , song song với OI và AB_1 . Mặt cắt dựng theo phần 2.b) và là tứ giác $MNPQ$ (hình 41). Có thể tính diện tích của nó bằng một trong hai cách sau :



Hình 41

Cách 1. Các đường NM , PQ , BO đồng quy tại điểm K . Do đó :

$$\begin{aligned}
S_{mc} &= S(KNP) - S(KMQ) = S(KMQ) \left(\frac{S(KNP)}{S(KMQ)} - 1 \right) = \\
&= S(KMQ) \left(\frac{KN}{KM} \cdot \frac{KP}{KQ} - 1 \right). \quad (1)
\end{aligned}$$

Do M là điểm giữa OA và KN // OI nên :

$$\frac{KN}{KM} = \frac{KN}{OI} = \frac{BN}{BI} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\text{Do } QO // PB \text{ nên : } \frac{KP}{KQ} = \frac{KB}{KO} = \frac{NB}{NI} = 3 \quad (3)$$

$$\text{và } OQ = \frac{1}{3} PB = \frac{1}{3} NB = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

$$OK = \frac{1}{2} OB = \frac{a}{2}.$$

Tứ diện OMKQ có góc tam diện tại O vuông nên theo kết quả 2 :

$$\begin{aligned} S(KMQ) &= \frac{1}{2} \sqrt{(OM \cdot OK)^2 + (OK \cdot OQ)^2 + (OQ \cdot OM)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a}{2}\right)^2} \\ &= \frac{a^2\sqrt{2}}{8} \quad (4) \end{aligned}$$

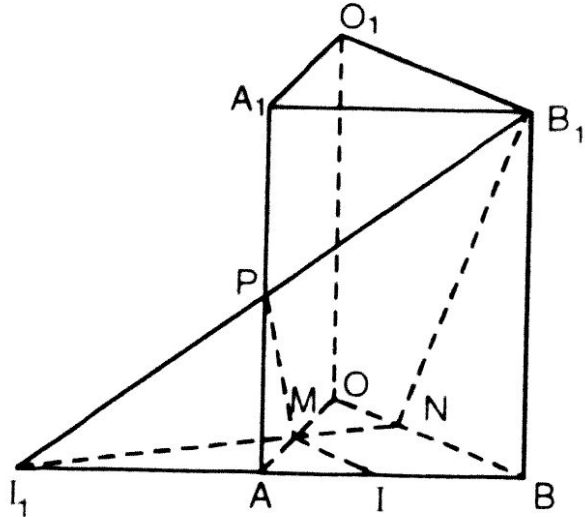
$$\begin{aligned} \text{Thay (2), (3), (4) vào (1) : } S_{mc} &= \frac{a^2\sqrt{2}}{8} \left(\frac{3}{2} \cdot 3 - 1 \right) = \\ &= \frac{7a^2\sqrt{2}}{16} \end{aligned}$$

Cách 2. Chiếu tứ giác MNPQ xuống mặt (OAB), ta được tứ giác MNBO có diện tích $\frac{7a^2}{16}$. Do $A_1B \perp (MNPQ)$ và $A_1A \perp (OAB)$ nên góc giữa 2 mặt phẳng (MNPQ) và (OAB) là góc giữa A_1B và A_1A , do đó bằng $\frac{\pi}{4}$. Vậy :

$$S_{mc} = \frac{S(MNBO)}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{7a^2\sqrt{2}}{16}$$

Ví dụ 5. Với giả thiết của ví dụ 4, P là điểm giữa AA_1 . Tính diện tích mặt cắt giữa lăng trụ với mặt phẳng (B_1MP) .

Giải : Chọn B_1P làm giao tuyến gốc (hình 42). B_1P cắt BA tại I_1 . I_1M cắt OB tại N . Tứ giác $MNPB_1$ là mặt cắt cần xét. Ta có :



Hình 42

$$\begin{aligned} S_{mc} &= s(I_1NB_1) - s(I_1MP) = s(I_1MP) \cdot \left(\frac{s(I_1NB_1)}{s(I_1MP)} - 1 \right) = \\ &= (I_1MP) \cdot \left(\frac{I_1N}{I_1M} \cdot \frac{I_1B_1}{I_1P} - 1 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Do } P \text{ là điểm giữa } AA_1 \text{ nên } I_1B_1/I_1P = B_1B/PA = 2. \quad (2)$$

$$\text{Do } MI \parallel NB \text{ nên } \frac{I_1N}{I_1M} = \frac{I_1B}{I_1I} = \frac{2AB}{\frac{3}{2}AB} = \frac{4}{3}. \quad (3)$$

Để tính $s(I_1MP)$ ta tính độ dài ba cạnh của nó :

$$MP = \frac{1}{2} OA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Trong } \triangle AMI_1 : MI_1^2 = AM^2 + AI_1^2 + \sqrt{2} \cdot AM \cdot AI_1 = \frac{13a^2}{4}.$$

$$\text{Trong } \triangle API_1 : PI_1^2 + AI_1^2 = \frac{10a^2}{4}.$$

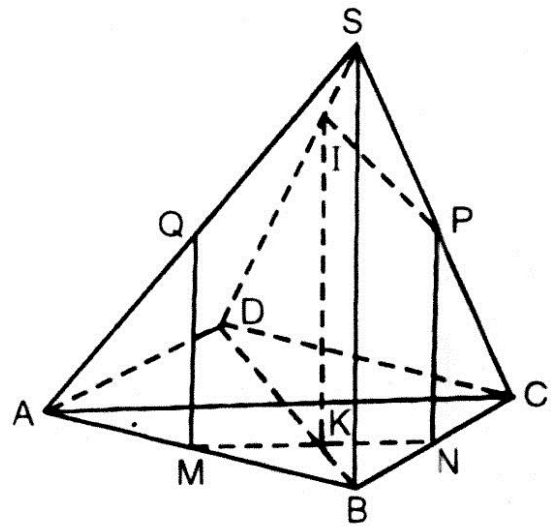
$$\begin{aligned}
\text{Vậy : } s(I_1MP) &= \frac{1}{2} MP \cdot MI_1 \sin PMI_1 = \\
&= \frac{1}{2} MP \cdot MI_1 \sqrt{1 - \cos^2(PMI_1)} = \\
&= \frac{1}{2} MP \cdot MI_1 \sqrt{1 - \left(\frac{MP^2 + MI_1^2 - I_1P^2}{2MP \cdot MI_1} \right)^2} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{(2MP \cdot MI_1)^2 (MP^2 + MI_1^2 - I_1P^2)^2} = \frac{a^2 \sqrt{30}}{8} \quad (4)
\end{aligned}$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được :

$$S_{mc} = \frac{a^2 \sqrt{30}}{8} \left(\frac{4}{3} \cdot 2 - 1 \right) = \frac{5a^2 \sqrt{30}}{24}$$

Ví dụ 6. Hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Tính diện tích mặt cắt giữa hình chóp với mặt phẳng α đi qua các điểm giữa M, N của AB, BC và song song với SB.

Giải : MN cắt BD tại K, K là điểm giữa của MN. Mặt phẳng α cắt mặt (SBA), (SBC), (SBD) theo các giao tuyến MQ.NP, KI cùng song song với SB ($Q \in SA$, $P \in SC$, $I \in SD$) (hình 43). Ngũ giác MNPIQ là mặt cắt cần xét. Do SABCD là hình chóp đều nên $AC \perp (SBD)$, mà $MN \parallel AC$.



Hình 43

Vậy $MN \perp (SBD)$. Do đó $MN \perp IK$.

Ngũ giác MNPIQ được trục đối xứng IK của mình chia thành 2 hình vuông bằng nhau MIKQ và NIKP.

Do đó :

$$S_{mc} = 2s(MKIQ) = (MQ + IK) \cdot MK. \quad (1)$$

MQ là đường trung bình của ΔSAB , nên : $MQ = \frac{1}{2}SB = \frac{b}{2}$. (2)

Trong ΔSBD :

$$\frac{IK}{SB} = \frac{DK}{DB} = \frac{\frac{3}{4}DB}{DB} = \frac{3}{4} \Rightarrow IK = \frac{3}{4}SB = \frac{3b}{4}. \quad (3)$$

Trong hình vuông ABCD : $MK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. (4)

Thay (2), (3), (4) vào (1) :

$$S_{mc} = \left(\frac{b}{2} + \frac{3b}{4} \right) \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{5ab\sqrt{2}}{16}.$$

§3. Tỷ số thể tích

Mặt phẳng α chia đa diện T thành hai khối T_1, T_2 . Bài toán đặt ra là cần tính thể tích V_1, V_2 của T_1, T_2 hoặc tỷ số $k = V_1/V_2$.

Nói chung, sẽ là đa diện có hình dạng phức tạp, nên để tính V_1 thường phải dùng một trong hai cách sau :

a) Bổ sung vào T_1 một số tứ diện để được một đa diện có thể tính được thể tích. Hiệu số giữa thể tích đó và tổng thể tích các tứ diện bổ sung cho V_1 .

b) Chia T_1 thành các khối đơn giản. Tính thể tích từng khối rồi cộng lại. Sau khi tính V_1 , thay cho việc tính V_2 có thể tính thể tích V của T. Lúc đó : $V_2 = V - V_1$ và

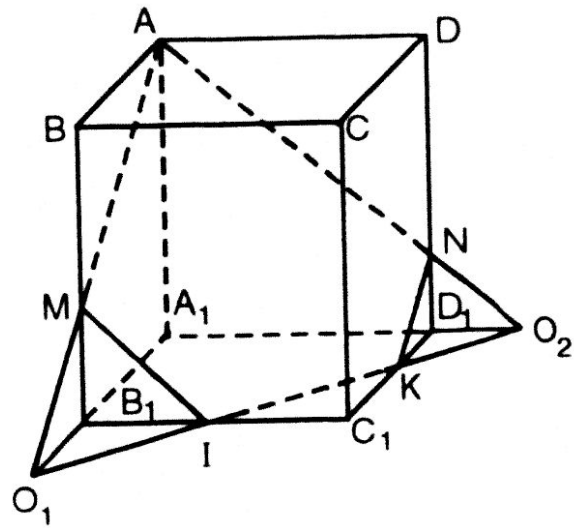
$$k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1}.$$

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh a .

Các điểm $M \in BB_1$, $N \in DD_1$ sao cho $MB_1 = ND_1 = \frac{a}{3}$.

Mặt phẳng (AMN) chia hình lập phương thành hai phần. Tính thể tích mỗi phần và tỷ số thể tích 2 phần đó.

Giải : Đường AM cắt $A_1 B_1$ tại O_1 . AN cắt $A_1 D_1$ tại O_2 . Đường $O_1 O_2$ cắt $B_1 C_1$, $C_1 D_1$ lần lượt tại I , K . Mặt phẳng (AMN) cắt hình lập phương theo mặt cắt $AMIKN$ (hình 44).



Hình 44

Do $MB_1 = ND_1 = \frac{a}{3}$ nên

để tính được :

$$O_1 B_1 = B_1 I = K D_1 = D_1 O_2 = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Do đó (1) : } v(AA_1 O_1 O_2) = \frac{1}{3} AA_1 \left(\frac{1}{2} A_1 O_1 \cdot A_1 O_2 \right) = \frac{3a^3}{8}$$

$$\text{và } v(MB_1 O_1 I) = v(NO_1 K O_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \right) = \frac{a^3}{72}.$$

Đặt $V_1 = v(A_1 B_1 D_1 AMIKN)$ ta có :

$$\begin{aligned} V_1 &= v(AA_1 O_1 O_2) - [v(MB_1 O_1 I) + v(ND_1 K O_2)] = \\ &= \frac{3a^3}{8} - \frac{2a^3}{72} = 25 \frac{a^3}{72}. \end{aligned}$$

(1) Ký hiệu $v(A_1 A_2 \dots A_n)$ dùng để chỉ thể tích đa diện $A_1 A_2 \dots A_n$.

$$V_2 = v(C_1BCDAMIKN) = a^3 - V_1 = \frac{47a^3}{72},$$

và $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$

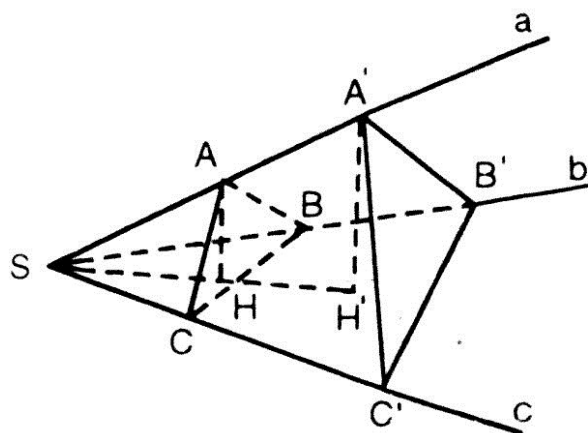
Để giải loại toán này, thường dùng đến hai kết quả sau :

Kết quả 1. Với góc tam diện Sabc và các cặp điểm (A, A'), (B, B'), (C, C') lần lượt nằm trên các tia Sa, Sb, Sc ta luôn

$$\text{luôn có : } \frac{v(SABC)}{v(SA'B'C')} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

Chứng minh : Hạ các đường cao (hình 45) AH, A'H' xuống mặt phẳng (Sb, Sc). Do AH // A'H' nên ba điểm S, H, H' thẳng hàng, và

$$\frac{HA}{H'A'} = \frac{SA}{SA'}$$



$$\frac{v(SABC)}{v(SA'B'C')} = \frac{\frac{1}{3} HA \cdot s(SBC)}{\frac{1}{3} H'A' \cdot s(SB'C')} = \text{Hình 45}$$

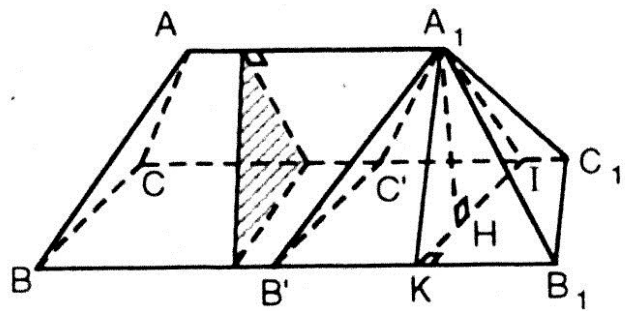
$$= \frac{HA}{H'A'} \cdot \frac{s(SBC)}{s(SB'C')} = \frac{SA}{SA'} \cdot \frac{SB}{SB'} \cdot \frac{SC}{SC'}$$

Kết quả 2. Đa diện $ABCA_1B_1C_1$ có các cạnh $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ gọi là hình gần lăng trụ. Đặt $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$ và diện tích mặt cắt tam giác, vuông góc với AA_1 của hình này là s . Thể tích của hình gần lăng trụ có thể tính bằng công thức :

$$V = \frac{1}{3} (a + b + c)s.$$

Chứng minh : (hình 46).

Có thể giả thiết rằng $a \leq b$,
 $a \leq c$. Mặt phẳng qua A_1 ,
 song song với (ABC) cắt
 đoạn BB_1 tại B' , CC_1 tại C' ,
 sẽ chia đa diện thành hai
 hình : hình lăng trụ
 $ABCA_1B'C'$ và hình chóp tứ
 giác $A_1B_1C_1C'B'$. Ký hiệu
 thể tích của chúng lần lượt
 là V_1 và V_2 .



Hình 46

Theo giả thiết, mặt cắt thẳng của lăng trụ $ABCA_1B'C'$ có diện
 tích s . Do đó thể tích của nó là $V_1 = AA_1.s = a.s$. (1)

Hình chóp $A_1B_1C_1C'B'$ có đáy là hình thang. Hạ đường cao
 A_1H của nó và qua H kẻ đường cao IK của đáy. ΔA_1IK nằm
 trên mặt phẳng vuông góc với các cạnh bên nên :

$$s(A_1IK) = \frac{1}{2} A_1H \cdot IK = s. \text{ Ta có :}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= v(A_1B_1C_1C'B') = \frac{1}{3} AK \cdot \frac{1}{2} IK \cdot (B'B_1 + C'C_1) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} A_1H \cdot IK \right) (BB_1 - BB' + CC_1 - CC') = \\ &= \frac{1}{3} s(b + c - 2a). \end{aligned} \quad (2)$$

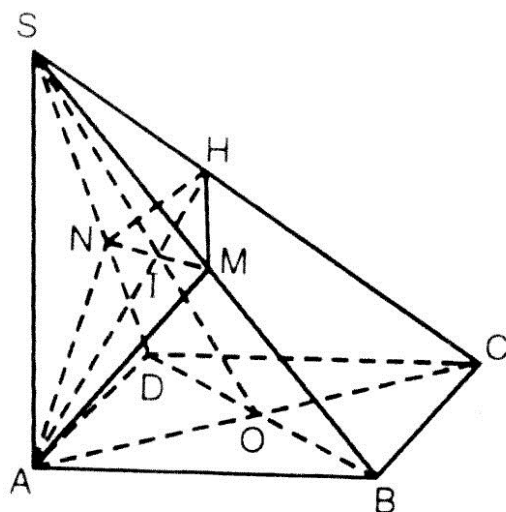
$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2) : } V &= V_1 + V_2 = \frac{1}{3} as + s(b + c - 2a) = \\ &= \frac{1}{3} (a + b + c)s. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy là hình vuông.
 Cạnh AS vuông góc với đáy. Cạnh SC lập với mặt phẳng (SAB)

một góc u . Mặt phẳng qua A, vuông góc với SC chia hình chóp thành 2 phần. Tính tỷ số thể tích 2 phần đó.

Giải : Dễ thấy $BD \perp (SAC)$ (hình 47) nên $BD \perp SC$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Mặt phẳng cần xét đi qua AH, song song với BD nên cắt hình chóp theo tứ giác AMHN ($M \in SB$, $N \in SD$). Đặt $V_1 = v(\text{SAMHN})$ ta thấy ngay : $V_1 = 2v(\text{SAMH})$, và $V = v(\text{SABCD}) = 2v(\text{SABC})$.



Hình 47

Do AH là đường cao của tam giác vuông SAC nên :

$$\frac{SH}{SC} = \frac{SA^2/SC}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} \quad (2)$$

Vì $BC \perp BA$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB)$. Vậy $BC \perp AM$. Mặt khác $SC \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$. Suy ra $AM \perp SB$. Xét tam giác vuông SAB, do AM là đường cao nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} \quad (3) \text{ thay (2), (3) vào (1) :}$$

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{SA^2}{SB \cdot SC} \right)^2 \quad (4)$$

Do $BC \perp (SAB)$ nên góc giữa SC và (SAB) là góc $\widehat{BSC}$. Vậy : $\widehat{BSC} = u$.

Trong tam giác vuông BSC : $SB = SC \cos u$, $BC = SC \sin u$.

$$AC = BC\sqrt{2} = SC < \sqrt{2}\sin u. \text{ Do đó :}$$

$$SA^2 = SC^2 - AC^2 = SC^2(1 - 2\sin^2 u) = SC^2\cos 2u.$$

$$\frac{SA^2}{SB \cdot SC} = \frac{SC^2\cos 2u}{(SC\cos u) \cdot SC} = \frac{\cos 2u}{\cos u} \quad (5)$$

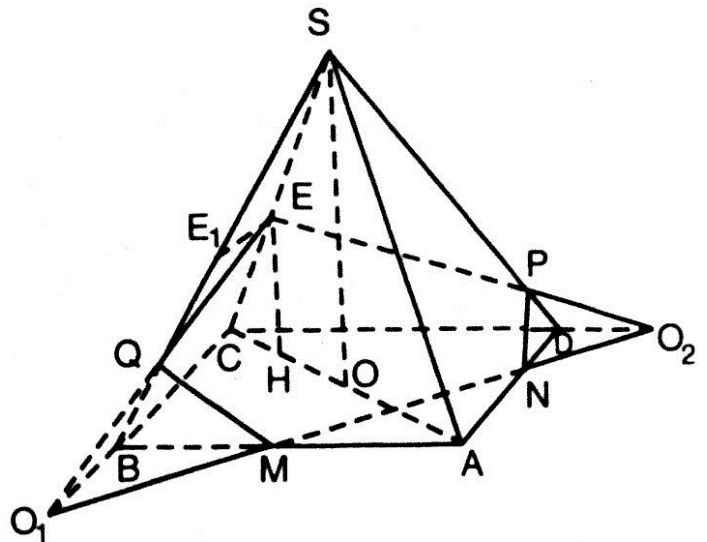
Thay (5) vào (4) : $\frac{V_1}{V} = \frac{\cos^2 2u}{\cos^2 u}$.

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{\cos^2 2u}{\cos^2 u - \cos^2 2u} = \frac{\cos^2 2u}{\sin u \cdot \sin 3u}$$

Chú ý : Tỷ số thể tích là một số thực, có thể không phụ thuộc vào các kích thước cụ thể của khối. Bởi vậy trong một số bài toán loại này đôi khi giả thiết sẽ không cho kích thước của hình. Gặp trường hợp đó, cần đưa vào một vài đại lượng trung gian để tính V, V_1, V_2 . Khi lập tỷ số, các đại lượng đó sẽ mất đi.

Ví dụ 3. Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp đều SABCD được phân chia bởi mặt phẳng α , đi qua các điểm giữa M, N, E của AB, AD, SC.

Giải : Đường thẳng MN cắt CB, CD tại O_1, O_2 . EO_1 cắt SB tại Q. EO_2 cắt SD tại P. Mặt phẳng α cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác MNPEQ (hình 48). Đặt cạnh đáy $AB = a$, đường cao SO của hình chóp là h.



Để thấy : $BO_1 = DO_2 = \frac{a}{2}$.

Hình 48

Hà $EH \perp (ABCD)$. EH là đường trung bình của ΔSCO :

$$EH = \frac{1}{2} SO = \frac{h}{2}.$$

$$\text{Vậy : } v(ECO_1O_2) = \frac{1}{3} EH \cdot \frac{1}{2} CO_1 \cdot CO_2 = \frac{3a^2h}{16}.$$

Lấy điểm giữa E_1 của SB . Dễ thấy $EE_1 \parallel (1/2)BC$ nên $EE_1 \parallel BO_1$. Suy ra Q là điểm giữa O_1E . Do đó, theo kết quả 1, ta có :

$$\begin{aligned} v(O_1MBQ) &= \frac{O_1M}{O_1O_2} \cdot \frac{O_1B}{O_1C} \cdot \frac{O_1Q}{O_1E} \cdot v(O_1O_2CE) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3a^2h}{16} = \frac{a^2h}{6 \cdot 16}. \end{aligned}$$

Tương tự

$$v(O_2NDP) = \frac{a^2h}{6 \cdot 16}. \text{ Vậy :}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= v(BCDMNPEQ) = v(ECO_1O_2) - [v(O_1MBQ) + v(O_2NDP)] = \\ &= \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{3 \cdot 16} = \frac{a^2h}{6}. \end{aligned}$$

$$V_2 = V - V_1 = \frac{a^2h}{3} - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6},$$

$$\text{và } \frac{V_1}{V_2} = 1.$$

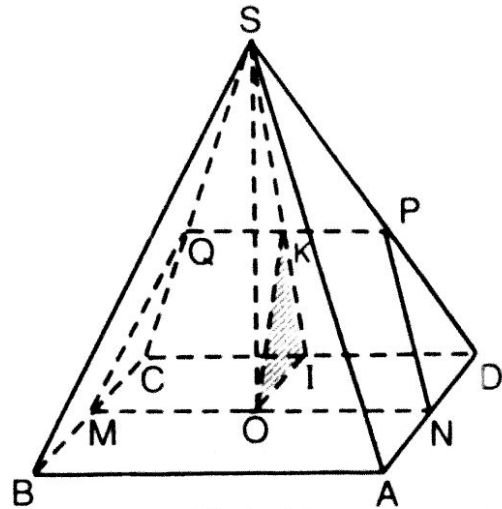
Ví dụ 4. Tính tỷ số thể tích hai phần của hình chóp đều $SABCD$ được phân chia bởi mặt phẳng qua tâm O của đáy, song song với mặt phẳng (SAB) .

Giải : Gọi I là điểm giữa CD , K là điểm giữa SI . Mặt phẳng tang xét cắt hình chóp theo mặt cắt là hình thang cân $MNPQ$.

Trong đó M, N, P, Q là điểm giữa các cạnh BC, DA, DS, SC (hình 49).

Đa diện CDMNPQ có MN // CD // PQ nên là hình gần lăng trụ và nhận ΔOIK làm mặt cắt thẳng. Do đó :

$$V_1 = v(\text{CDMNPQ}) = \frac{1}{3} (MN + PQ + CD) \cdot s(\text{OIK}).$$



Hình 49

Đặt $AB = a$, $SO = h$, ta có :

$MN = CD = a$; $PQ = \frac{a}{2}$. Do K là điểm giữa SI nên

$$s(\text{OIK}) = \frac{1}{2} s(\text{SIO}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} SO \cdot OI = \frac{ah}{8} .$$

$$\text{Vậy } V_1 = \frac{1}{3} \left(a + a + \frac{a}{2} \right) \frac{ah}{8} = \frac{5a^2h}{48} ,$$

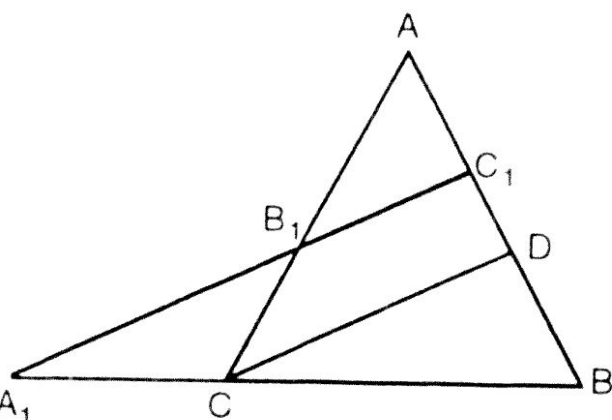
$$\text{Và } V_2 = V - V_1 = \frac{a^2h}{3} - \frac{5a^2h}{48} = \frac{11a^2h}{48} .$$

$$\text{Do đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{11} .$$

Chú ý : Trong khi tính tỷ lệ độ dài các đoạn thẳng, thường gặp phải bài toán sau : Một đường thẳng d cắt ba cạnh của tam giác ABC tại A_1 , B_1 , C_1 .

Biết hai trong ba tỷ số $\frac{A_1B}{A_1C}$, $\frac{C_1A}{C_1B}$, $\frac{B_1C}{B_1A}$, cần tính tỷ số còn lại (hình 50).

Chẳng hạn, để tính tỷ số $\frac{C_1A}{C_1B}$ theo hai tỷ số còn lại, cần phải qua đỉnh còn lại của ΔABC , tức là đỉnh C, kẻ đường $CD \parallel d$ ($D \in AB$).

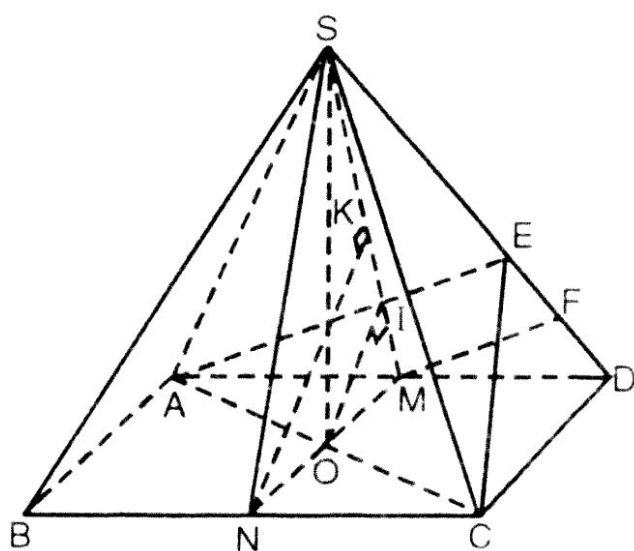


Trong các ΔACD và ΔA_1C_1E : A_1 C

$$\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{C_1A}{C_1D} \cdot \frac{C_1D}{C_1B} = \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B}$$

Hình 50

Ví dụ 5. Hình chóp tứ giác đều SABCD có các mặt bên nghiêng trên đáy một góc u . Mặt phẳng qua AC vuông góc với mặt (SAD) chia hình chóp thành hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.



Hình 51

Giải : Gọi M, N là điểm giữa các đoạn AD, BC, SMN sẽ là tam giác cân ($SM = SN$) có góc ở đáy là u . Kẻ đường cao NK của tam giác này, ta có $NK \perp (SAD)$. Mặt phẳng đang xét sẽ đi qua AC, song song với NK và cắt hình chóp theo mặt cắt là ΔACE ($E \in SD$). Trong hình 51, O là tâm của đáy và $OI \parallel NK$. Đặt $AB = a$ ($= MN$). Tam giác SOM vuông tại O, nhận OI làm đường cao nên ta có :

$$\frac{IM}{IS} = \left(\frac{OM}{OS} \right)^2 = \cot^2 \widehat{SMO} = \cot^2 u = \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} \quad (1)$$

Đặt $V_1 = v(DACE)$, ta có :

$$\frac{V_1}{V} = \frac{v(DACE)}{2v(DACS)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DE}{DS} \quad (2)$$

Để tính $\frac{DE}{DS}$, trước tiên ta dùng phương pháp đã nêu trong chú ý trên cho ΔSMD và đường AE để tính $\frac{DE}{ES}$.

Kẻ $MF \parallel AE$ ($E \in SD$) ta có :

$$\frac{DE}{ES} = \frac{DE}{EF} \cdot \frac{EF}{ES} = \frac{DA}{AM} \cdot \frac{IM}{IS} = \frac{2\cos^2 u}{\sin^2 u}$$

Do đó :

$$\frac{DE}{DS} = \frac{DE}{DE + ES} = \frac{2\cos^2 u}{2\cos^2 u + \sin^2 u} = \frac{2\cos^2 u}{1 + \cos^2 u}$$

Vậy :

$$\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{DE}{DS} = \frac{2\cos^2 u}{2(1 + \cos^2 u)}$$

và :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{V - V_1} = \frac{2\cos^2 u}{2(1 + \cos^2 u) - 2\cos^2 u} = \cos^2 u.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Cho tứ diện $SABC$, M là điểm giữa SB . Kéo dài BA , lấy điểm N sao cho $BN = 2BA$ ($AN = AB$). P là một điểm thuộc trung tuyến SD của SBC . Điểm P cần nằm ở đâu trên đoạn này để mặt cắt giữa tứ diện và mặt phẳng (MNP) sẽ là tam giác ?

2. Kéo dài các cạnh AB, AD của hình hộp $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, lấy các điểm M, N thỏa mãn $AM = (3/2)AB$, $AN = \frac{3}{2} AD$ ($BM = \frac{1}{2} AB$, $DN = \frac{1}{2} AD$). Cần chọn vị trí của điểm P trên đoạn $A_1 B_1$ ra sao để mặt cắt giữa hình hộp và mặt phẳng (MNP) sẽ là tứ giác ? là ngũ giác ?

3. Cho lăng trụ $OABO_1 A_1 B_1$. M, E, F là điểm giữa các đoạn OA, OB, OE. Điểm H thuộc đoạn AA_1 sao cho $AH = 2HA_1$. Dựng mặt cắt giữa lăng trụ và các mặt phẳng sau :

a) $(B_1 HE)$; b) (MHE) ; c) qua ME, $\parallel O_1 A$; d) qua ME, $\parallel OB_1$; e) qua MB, $\parallel A_1 E$; f) qua E, $\parallel OB_1$ và BM ; g) qua M, $\parallel A_1 E$ và OO_1 ; h) qua F, $\parallel B_1 E$ và $A_1 O$; i) qua M, $\parallel A_1 E$ và OH.

4. Hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh đáy bằng a và đường cao bằng $a\sqrt{2}$. O là tâm của đáy và điểm M thuộc đoạn AO. Mặt phẳng α qua M, song song với AD và SO.

a) Dựng mặt cắt giữa α và hình chóp. Chứng minh rằng mặt cắt là đa giác nội tiếp được. Tính các cạnh của đa giác đó theo a và $k = AM/AO$.

b) Xác định giá trị của k để mặt cắt trên là đa giác ngoại tiếp được. Tính diện tích của nó trong trường hợp đó.

5. Hình chóp tam giác đều có góc ở đỉnh là α , độ dài cạnh bên bằng a. Tính diện tích mặt cắt giữa hình chóp với mặt phẳng đi qua một cạnh đáy và điểm giữa của cạnh bên đối diện.

6*. Hình chóp SABCD có đáy là hình thang với các cạnh $AB = CD = a$, $BC = 2a$, $AD = 3a$. Cạnh SC vuông góc với đáy và có độ dài h. Dựng và tính diện tích mặt cắt giữa hình chóp với mặt phẳng qua C, $\parallel AB$, SD.

7*. Lăng trụ tam giác đứng $ABCA_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông. $CA = CB = a$, $AA_1 = a\sqrt{2}$; M, N, I, K là điểm giữa các đoạn CA, CC_1 , AB, BB_1 . Dựng và tính diện tích mặt cắt giữa lăng trụ với các mặt phẳng sau :

- a) qua M, $\perp A_1B$; b) qua M, $\perp A_1I$; c) qua N, $\perp NB_1$;
 d) qua MN, $\perp (ABB_1A_1)$; e) qua MB_1 , $\perp (A_1BC)$; f) qua MB_1 , $\perp (A_1IC)$; g) qua MN, $\perp (IKC)$; h) qua A, M, $\perp (NAB)$;
 i) qua KN, $\perp (NAB)$.

8*. Hình chóp SABC có đáy là tam giác vuông tại A. $AB = a$, $BC = 2a$. Điểm H thuộc đoạn AC sao cho $HA = 2HC$. SH là đường cao của hình chóp và có độ dài $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. I, J là điểm giữa các đoạn BC, SA.

- a) Chứng minh rằng các mặt của hình chóp đều là tam giác vuông.

Dựng và tính diện tích mặt cắt giữa hình chóp với các mặt phẳng : b) qua điểm giữa đoạn SH, $\parallel$ SA, BC ; c) qua H, $\perp AI$;
 d) qua BJ, $\perp (SHI)$; e) qua I, $\perp BC$.

9. ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng a.

a) M là điểm giữa AB. Điểm N thuộc đoạn BC sao cho $BN = 2NC$. Điểm P nằm trên trung tuyến DI của $\triangle ACD$ sao cho $DP = \frac{3}{4}PI$. Tính diện tích mặt cắt giữa tứ diện với mặt phẳng (MNP).

b) Mặt phẳng α đi qua D, $\parallel$ BC chia tứ diện thành hai phần tương đương⁽¹⁾. Tính diện tích mặt cắt giữa α với tứ diện.

(1) Tức là hai phần có thể tích bằng nhau.

10. Cho tứ diện ABCD. M là điểm giữa DA. Các điểm N, P chia đoạn BD thành ba phần bằng nhau ($BN = NP = PD$). Tính tỷ số thể tích hai phần của tứ diện được phân chia bởi các mặt phẳng sau : a) qua MN, // trung tuyến AI của $\triangle ABC$; b) Qua MP, // AI ; c) qua MN, // trung tuyến CE của $\triangle ABC$.

11. Các điểm M, N, P lần lượt nằm trong các đoạn A_1B_1 , B_1C_1 , BC sao cho :

$$\frac{MB_1}{A_1B_1} = \frac{1}{2} ; \frac{NB_1}{C_1B_1} = \frac{2}{3} ; \frac{PB}{CB} = \frac{1}{3} .$$

Mặt phẳng (MNP) chia lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ thành hai phần. Tính tỷ số thể tích hai phần đó.

12. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, cạnh a. K, L là điểm giữa các đoạn AB, DD_1 .

a) Tính diện tích mặt cắt giữa hình lập phương và mặt phẳng (A_1KL) .

b) Tính tỷ số thể tích hai phần của hình lập phương được phân chia bởi mặt phẳng trên.

13. Hình chóp SABC có đáy là tam giác vuông. Cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = a$. Tính diện tích mặt cắt giữa hình chóp và các mặt phẳng sau : a) qua a, $\perp SC$; b) qua điểm giữa của AB, $\perp SC$.

c) qua các điểm giữa của AC, BC và // SC, d) mỗi mặt phẳng trên chia hình chóp thành 2 phần : tính tỷ số thể tích của hai phần đó.

14*. Tứ diện ABCD có thể tích bằng V, K là trọng tâm $\triangle ABC$. Kéo dài các đoạn AD, BD, CD, KD về phía D và lấy các điểm L, M, N, P sao cho $DL = 2DA$, $DM = 2DB$, $DN = 2DC$, $DP = DK$. Tính thể tích tứ diện LMNP theo V.

15*. Với tứ diện ABCD, hãy chứng minh rằng :

a) Diện tích mọi mặt cắt tam giác của tứ diện đều không vượt quá diện tích một mặt nào đó của tứ diện ;

b) Mọi mặt phẳng đi qua điểm giữa 2 cạnh đối diện của tứ diện đều chia nó thành hai phần tương đương.

16*. Tứ diện có hai mặt nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau, một là tam giác đều cạnh a , một là tam giác cân với cạnh bên bằng $b \neq a$. Mặt phẳng α cắt tứ diện theo mặt cắt là hình vuông. Tính diện tích mặt cắt đó và tỷ số thể tích hai phần của tứ diện được phân chia bởi α .

17*. Cho hình lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a .

a) M, N và P lần lượt là các điểm giữa của AB, CC' và A'D'. Dựng mặt cắt tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương, tính tỷ số thể tích hai phần của hình lập phương do mặt cắt đó chia ra.

b) Kéo dài DA về phía A một đoạn $AE = x$, DC về phía C đoạn $CF = x$ và DD' về phía D' một đoạn $D'G = x$. Dựng mặt cắt qua EFG khi $x = 1,5a$. Với giá trị nào đó của x , thì mặt cắt đó tồn tại ? Trong trường hợp đó, tìm x để diện tích mặt cắt là lớn nhất.

18. Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , đường cao bằng h . α là mặt phẳng đi qua một cạnh đáy và điểm giữa cạnh bên chéo nhau với cạnh đáy của hình chóp.

a) Tính diện tích mặt cắt giữa α và hình chóp.

b) Tính tỷ số diện tích hai phần của hình chóp, phân chia bởi mặt phẳng α .

c) Tính khoảng cách từ đỉnh hình chóp đến mặt phẳng α .

19. Cho tứ diện đều ABCD, hai mặt phẳng α, β song song với nhau, cách nhau một khoảng bằng $2\sqrt{2}$, cùng song song với

AB và CD, cắt tứ diện theo các mặt cắt có diện tích lần lượt là 24 và 16. Tính độ dài cạnh của tứ diện đã cho.

20. Tứ diện ABCD có các mặt ABD, ACD là các tam giác vuông. K là điểm giữa BC và $\triangle ADK$ là tam giác vuông cân tại A. Mặt phẳng α không đi qua điểm giữa các cạnh AD, BC cắt tứ diện theo mặt cắt là hình thang cân EFGH, trong đó E là điểm giữa BD, điểm G chia đoạn AC theo tỷ số 3. Biết diện tích tam giác BCD bằng s . Hãy tính diện tích mặt cắt này.

21. Hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Các mặt SAD, SBC là các tam giác vuông. P là điểm giữa CD. Các đoạn BC và SP bằng nhau đồng thời vuông góc với nhau. Một mặt phẳng α cắt các đoạn SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Biết $SM = 3MA$, $SH = HC$, mặt cắt MNPQ là hình thang cân và diện tích tam giác SAB bằng s . Tính diện tích tứ giác MNPQ.

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG II

6. $\frac{2a}{9} \sqrt{3a^2 + 4b^2}$.

7. a) $\frac{7a^2\sqrt{2}}{16}$ b) $\frac{7a^2\sqrt{5}}{32}$ c) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{3a^2\sqrt{5}}{6}$

e) $\frac{9a^2\sqrt{42}}{80}$ f) $\frac{5a^2\sqrt{30}}{24}$ g) $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$

h) $\frac{a^2\sqrt{11}}{12}$ i) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$

8. b) $\frac{4a^2}{9}$. c) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. d) $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$. e) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

9. a) $\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}$. Chỉ dẫn : mặt cắt là hình thang cân.

b) $\frac{a^2}{8} \sqrt{11 - 4\sqrt{2}}$.

10. a) $\frac{2}{13}$. b) $\frac{1}{5}$. c) $\frac{4}{17}$.

11. $\frac{7}{29}$. Chỉ dẫn : Mặt phẳng (MNP) cắt tam giác ABC theo đoạn PK // MN, K thuộc AB và $BK = \frac{1}{4} AB$.

12. a) $\frac{3a^2\sqrt{21}}{16}$. b) $\frac{7}{41}$.

13. a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. b) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. c) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. d) $\frac{1}{5}$. 1,1

14. $\frac{20V}{3}$.

16. a) $\frac{2a^2(a^2 + 2b^2)}{(2a + \sqrt{2a^2 + 4b^2})^2}$. b) $\frac{2a^2(2a + 3\sqrt{2a^2 + 4b^2})}{(a^2 + 2b^2)(6a + \sqrt{2a^2 + 4b^2})}$.

Chỉ dẫn : a) Tứ diện đã cho chỉ có một cặp cạnh chéo nhau vuông góc với nhau, α phải song song với cặp cạnh đó.

b) Chứng minh kết quả : Mặt phẳng α // AB, CD cắt tứ diện ABCD sẽ chia tứ diện thành 2 phần có tỷ số thể tích bằng k^2 .

$\frac{(k+3)}{3k+1}$, trong đó k là tỷ số khoảng cách từ AB và CD đến α .

18. a) $S_{mc} = \frac{3}{16} a\sqrt{9a^2 + 4h^2}$; b) $k = 0,6$.

c) $d = \frac{2ab}{\sqrt{9a^2 + 4h^2}}$

19. 10. Chỉ dẫn : hai mặt cắt đều là hình chữ nhật.

20. $\frac{5\sqrt{10}}{32}$. Chỉ dẫn : hãy chứng minh rằng $AD \perp (ABC)$;

$F \in CD, H \in AB$.

21. $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. Chỉ dẫn : hãy chứng minh rằng $\triangle BCD$ và hình chữ nhật $SCD = SDA = 90^\circ$ và $MN \parallel PQ$.

CHƯƠNG III

QUỸ TÍCH

A. QUỸ TÍCH TRONG MẶT PHẪNG

§1. Giải bài toán quỹ tích

Như chúng ta đã biết, quỹ tích là tập hợp những điểm có một số tính chất chung nào đó và chỉ những điểm của tập hợp ấy, có tính chất đó mà thôi. Trong mỗi bài toán quỹ tích thường có hai loại yếu tố : yếu tố cố định và yếu tố chuyển động. Việc tìm ra mối liên hệ giữa hai loại yếu tố đó sẽ là khâu chủ yếu giúp ta giải bài toán quỹ tích. Trong giáo trình bậc phổ thông trung học, người ta đã xét một số quỹ tích cơ bản để làm cơ sở cho việc giải các bài toán quỹ tích nói chung⁽¹⁾.

(1) Bạn đọc cần nắm vững các quỹ tích cơ bản đã có trong chương trình hình học các lớp 8, 9, 10 (hệ 12 năm).

Trong chương này, để thuận tiện cho việc theo dõi của bạn đọc, chúng tôi chủ yếu sẽ trình bày các bài toán quỹ tích có thể đưa về dạng quỹ tích cơ bản. Bạn đọc muốn đi sâu hơn về vấn đề này xin xem phần bài tập ở cuối chương.

Với hạn chế đó, khi quỹ tích cần tìm gồm toàn bộ một hay nhiều quỹ tích cơ bản, ta gọi là quỹ tích không có giới hạn. Còn các quỹ tích chỉ gồm một phần của một hay nhiều quỹ tích cơ bản, là quỹ tích có giới hạn được tiến hành theo thứ tự như sau :

1) *Phần thuận* : Lấy một điểm M bất kỳ thỏa mãn điều kiện của bài toán, hãy xét xem M phải nằm trên quỹ tích cơ bản nào. Giả sử đó là đường L (đường thẳng hoặc đường tròn chẳng hạn).

2) *Phần đảo* : Lấy một điểm M' tùy ý nằm trên đường L, phải chứng minh rằng M' có tính chất của bài toán đang xét.

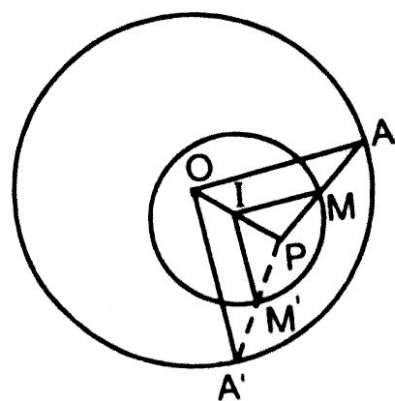
3) *Kết luận* : Quỹ tích của điểm M đang xét là đường L.

Ví dụ 1. Cho một điểm P cố định nằm trong đường tròn S và một điểm A chuyển động trên đường tròn này. Tìm quỹ tích điểm giữa M của đoạn PA.

Giải : Phần thuận (hình 52).

Gọi O, R là tâm và bán kính của S, ta có O cố định và R không đổi. Do đoạn OP cố định nên điểm giữa I của nó cũng cố định. Nối O với A, I với M. Trong $\triangle OAP$, IM là đường trung bình, do đó :

$$IM = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R.$$



Hình 52

Điểm M cách điểm I cố định một khoảng $R/2$ không đổi ; do đó sẽ nằm trên đường tròn S' , tâm I, bán kính $R/2$.

Phân đảo : Lấy một điểm M' tùy ý của đường tròn S' (I, $R/2$), cần chứng minh rằng có một điểm $A' \in S$ (O, R) để đoạn PA' nhận M' làm điểm giữa. Nối PM' kéo dài cắt S tại A' . Nối OA' . Trong $\triangle OA'P$, do $IM' = R/2 = OA'/2$ và I là điểm giữa của OP nên dễ thấy IM' là đường trung bình của tam giác này, nên M' là điểm giữa đoạn PA' . Vậy M' thỏa mãn điều kiện của bài toán (hình 52).

Kết luận : Quỹ tích của điểm M đang xét là đường tròn S' (I, $R/2$).

Trong bài toán trên, yếu tố chuyển động là các điểm A, M. Còn yếu tố cố định là O, P, I và độ dài R. Việc tìm sự liên hệ giữa hai loại yếu tố này (nối O với A, I với M) đã dẫn đến cách giải của bài toán (IM là đường trung bình của $\triangle OPA$).

Với mỗi bài toán quỹ tích, việc phân biệt rõ hai loại yếu tố trên và làm xuất hiện các yếu tố cố định mới là rất cần thiết. Cần chú ý đến hai ý sau :

a) Một đường tròn cố định sẽ cho hai yếu tố cố định : một điểm (làm tâm) và một độ dài (là bán kính của nó).

b) Hai điểm A, B cố định sẽ cho một độ dài cố định, là độ dài đoạn AB. Và nếu k là một số cố định, thì các điểm chia đoạn AB theo tỷ số k cũng cố định (chẳng hạn, điểm giữa của đoạn AB). Để đỡ công kênh vẽ mặt ký hiệu, trong phần đảo, thường thường người ta cũng sẽ ký hiệu điểm bất kỳ lấy trên đường L là M giống như ký hiệu của phần thuận. Tuy nhiên, bạn đọc cần phân biệt được vai trò khác nhau (về mặt lý luận) của hai điểm cùng ký hiệu là M của hai phần này. Trong các bài toán sau chúng ta cũng sẽ làm như vậy.

Ví dụ 2. Cho A là điểm cố định trên đường tròn S tâm O, còn C là điểm chuyển động trên đường tròn này, dựng hình bình hành OABC. Tìm quỹ tích trọng tâm M của tam giác ABC.

Giải : Phân thuận (hình 53) :

Vì $OA = OC$ nên hình bình hành OACB là hình thoi. Do đó hai đường chéo OB, AC sẽ vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm giữa I của mỗi đường. Do M là trọng tâm ABC nên :

$$M \in BI \text{ và } IM = \frac{1}{3}IB = \frac{1}{3}IO.$$

$$\text{Vậy : } \frac{IM}{IO} = \frac{1}{3}.$$

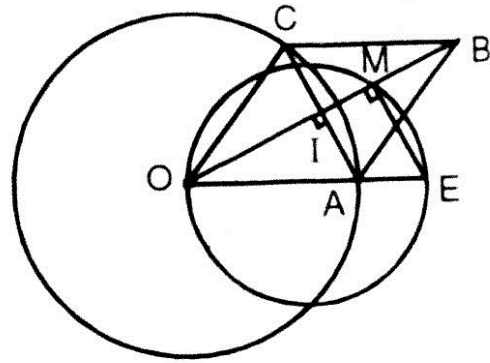
Đường thẳng qua M song song với AC cắt đường OA tại E. Ta có :

$$\frac{AE}{AO} = \frac{IM}{IO} = \frac{1}{3}.$$

Do O, A cố định nên E cũng cố định. Vì $AC \perp OB$ nên $EM \perp OM$. Điểm M nhìn đoạn OE cố định dưới góc vuông nên sẽ nằm trên đường tròn S' đường kính OE.

Phản đảo : Lấy một điểm M tùy ý trên đường tròn s'. Đường thẳng qua S song song với ME cắt đường tròn S tại một điểm nữa là C. Dựng hình bình hành OABC. Ta cần chứng minh rằng M là trọng tâm tam giác ABC.

Theo cách dựng, OABC sẽ là hình thoi. Gọi I là tâm của nó. Ta có $OB \perp AC$, mà $ME \parallel AC \Rightarrow OB \perp ME$. (1) Mặt khác, do $M \in S'$ nên $OM \perp ME$. (2) Do (1) và (2), hai đường OB, OM



Hình 53

cùng đi qua O, lại cùng vuông góc với ME, nên phải trùng nhau. Vậy M nằm trên OB, tức là trên trung tuyến BI của ABC. Đồng thời do $ME \parallel AI$ và $IB = IO$ nên

$$\frac{IM}{IB} = \frac{IO}{IB} = \frac{AO}{IB} = \frac{1}{3}.$$

Điều này chứng tỏ M là trọng tâm tam giác ABC.

Kết luận : Quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện đầu bài là đường tròn đường kính OE, trong đó E là điểm chia ngoài đoạn OA theo tỷ số 4 $\left(\frac{EO}{EA} = 4 \right)$.

Chú ý : Phần đảo của bài toán quỹ tích thường được trình bày như sau : lấy điểm M tùy ý trên quỹ tích cơ bản đã tìm được. Để chứng minh M thỏa mãn điều kiện đầu bài, ta tách điều kiện đó thành hai phần, dựng hình vẽ thỏa mãn một trong hai phần đó và chứng minh hình vẽ đó cho M phải thỏa mãn phần còn lại.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật ABCD. Một góc vuông $\widehat{xAy}$ quay quanh A có hai cạnh góc vuông lần lượt cắt các đường thẳng BC, CD tại E, F. Dựng hình chữ nhật AENF. Gọi M là tâm của hình chữ nhật này. Tìm quỹ tích các điểm M, N.

Giải : *Phần thuận* (hình 54). Tâm M của hình chữ nhật AENF là điểm giữa chung của 2 đường chéo AN và EF, do đó

$$MA = \frac{1}{2} EF. \quad (1)$$

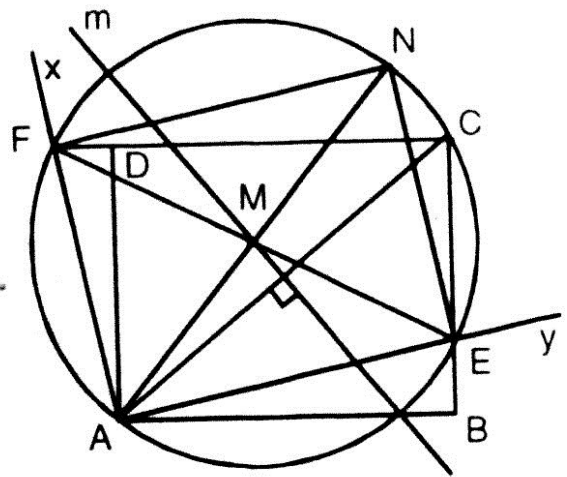
Mặt khác, nối MC. Trong tam giác vuông CEF, CM là trung tuyến thuộc cạnh huyền nên :

$$MC = \frac{1}{2} EF. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MA = MC$.

Điều này chứng tỏ M nằm trên đường trung trực m của đoạn AC .

Phần đảo : Lấy một điểm M tùy ý thuộc m . Đường tròn tâm M , bán kính $MA = MC$ sẽ cắt các đường CB , CD lần lượt tại các điểm E , F nữa. Dựng hình bình hành $AENF$. Ta sẽ chứng minh rằng $AENF$ là hình chữ nhật và M là tâm của nó (hình 54).



Hình 54

Theo cách dựng bốn điểm A , C , E , F nằm trên đường tròn tâm M , do đó $\widehat{FCE}$ là góc nội tiếp của đường tròn này. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\widehat{FCE} = \frac{\pi}{2}$. Bởi vậy EF là đường kính của đường tròn đang xét. Vậy tâm M là điểm giữa đoạn EF . Suy ra :

$$\widehat{FAE} = \widehat{FCE} = \frac{\pi}{2}.$$

Do đó $AENF$ là hình chữ nhật. Rõ ràng M là tâm hình chữ nhật này.

Kết luận : Quỹ tích của M là đường trung trực m của đoạn AC .

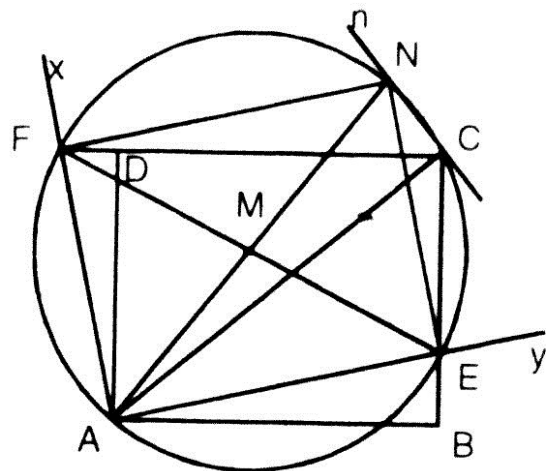
b) *Quỹ tích N :* (hình 55).

Phần thuận : Trong tam giác vuông CEF ta có

$$CM = \frac{1}{2} EF. \text{ Do } EF = AN \text{ nên } CM = \frac{1}{2} AN. \Delta CAN \text{ có trung}$$

tuyến CM bằng nửa cạnh đối diện, do đó là tam giác vuông tại C : $NC \perp AC$. Vậy N nằm trên đường thẳng n vuông góc với AC tại C .

Phân đảo : Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng n . Đường tròn đường kính AN (sẽ đi qua C) cắt các đường CB, CD lần lượt tại E, F. Bạn đọc hãy tự chứng minh rằng AENF là một hình chữ nhật (hình 55). Và do đó, hoàn thành phân đảo.



Hình 55

Kết luận : Quỹ tích của N là đường thẳng n , vuông góc với AC tại C.

Ví dụ 4. Cho đường tròn S (O, R). Một điểm P nằm trong S. Góc vuông $\widehat{xPy}$ quay quanh P có hai cạnh góc vuông cắt S lần lượt tại A, B. Gọi M là điểm giữa đoạn AB và H là hình chiếu của P trên đường thẳng AB.

- Chứng minh rằng $MP^2 + MO^2 = HP^2 + HO^2$.
- Tìm quỹ tích các điểm M, H.

Giải : (hình 56).

a) Do M là điểm giữa dây cung AB của S nên $OM \perp AB$. Trong tam giác vuông PHM ta có

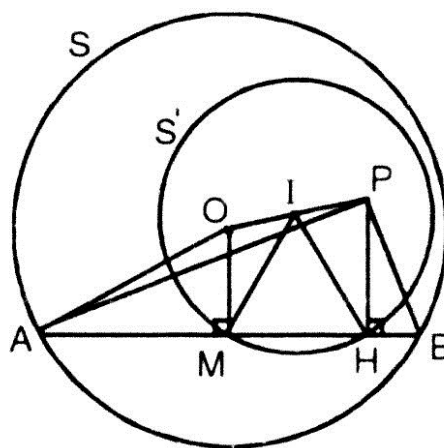
$$MP^2 = MH^2 + HP^2. \quad (1)$$

Trong tam giác vuông OMH :

$$MO^2 = HO^2 - MH^2. \quad (2)$$

Cộng hai đẳng thức (1) và (2) lại, ta được :

$$MP^2 + MO^2 = HP^2 + HO^2.$$



Hình 56

b) *Quỹ tích điểm M.*

Phần thuận : Trong tam giác vuông OMA, ta có :

$$OM^2 + MA^2 = OA^2 = R^2. \quad (3)$$

Do PM là trung tuyến của tam giác vuông PAB nên $MP = MA$.
Thay giá trị này vào (3), ta được :

$$MO^2 + MP^2 = R^2. \quad (4)$$

Do O, P cố định nên theo quỹ tích cơ bản, đẳng thức (4) chứng tỏ M nằm trên đường tròn S' , có tâm là điểm giữa I của đoạn OP, và bán kính $R' = \frac{1}{2} \sqrt{2R^2 - OP^2}$.

Phần đảo : Lấy một điểm M nằm trên đường tròn S' . Đường thẳng qua M, vuông góc với OM cắt đường tròn S tại hai điểm A, B. Rõ ràng M là điểm giữa đoạn AB. Ta chỉ cần chứng minh $\widehat{APB} = \frac{\pi}{2}$ là được. Do M nằm trên S' nên :

$$MO^2 + MP^2 = R^2. \quad (5)$$

Mặt khác, trong tam giác vuông OMA ta có :

$$MO^2 + MA^2 = R^2. \quad (6)$$

So sánh (5) và (6) ta được $MP = MA = \frac{1}{2} AB$.

Điều này chứng tỏ ΔPAB vuông tại P : $\widehat{APB} = \frac{\pi}{2}$

Kết luận : Quỹ tích của M là đường tròn S' .

Quỹ tích điểm H : Theo các phần chứng minh trên, ta có $HO^2 + HP^2 = MP^2 + MO^2 = R^2$.

Do đó điểm H cũng nằm trên đường tròn S' . Bạn đọc tự chứng minh phần đảo để kết luận rằng quỹ tích của H là toàn bộ đường tròn S' .

§2. Giới hạn của quỹ tích

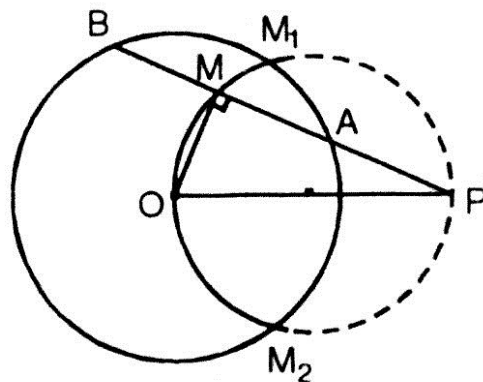
Nếu quỹ tích cần tìm chỉ là một hoặc vài phần của quỹ tích cơ bản (cung tròn, đoạn thẳng, nửa đường thẳng...), thì ta cần phải chỉ rõ các phần đó, bằng cách nói rõ phần nào của quỹ tích cơ bản thỏa mãn điều kiện của bài toán, và phần nào của quỹ tích cơ bản không thỏa mãn điều kiện của bài toán, đặc biệt chỉ rõ ranh giới của các phần đó, tức là cần tìm giới hạn của quỹ tích.

Một mặt, cách chứng minh phần đảo trong các ví dụ tiếp theo cũng tương tự như ở các ví dụ trên, mặt khác vì khuôn khổ tập sách có hạn, nên trong các ví dụ tiếp theo, việc chứng minh phần đảo xin dành cho bạn đọc. Hai phương pháp thường được dùng để tìm giới hạn của quỹ tích là :

1) *Phương pháp phần giao.* Sau khi tìm được điểm M phải nằm trên quỹ tích cơ bản ℓ , hãy xét xem, với những giả thiết đã cho điểm M phải nằm ở miền nào của mặt phẳng. Phần giao của ℓ với miền này, tức là phần của ℓ nằm trong miền đó sẽ cho quỹ tích cần tìm.

Ví dụ 1. Cho đường tròn S và một điểm P cố định ở ngoài đường tròn đó. Đường thẳng d thay đổi luôn qua P cắt S tại hai điểm A, B . Tìm quỹ tích điểm giữa M của đoạn AB .

Giải : Gọi O là tâm của S . Do M là điểm giữa của dây AB nên $OM \perp AB$. Điểm M nhìn đoạn OP cố định dưới góc vuông nên sẽ nằm trên đường tròn S' đường kính OP (hình 57).



Hình 57

Giới hạn : Vì M là điểm giữa dây cung AB của đường tròn S nên M không thể nằm ngoài S được. Do đó M phải nằm ở phần của S' nằm trong S, tức là thuộc cung $\widehat{M_1M_2}$ của đường tròn này (hình 57).

Kết luận : Quy tích của M là cung $\widehat{M_1M_2}$ của đường tròn S'.

Ví dụ 2. Cho trên đường thẳng d ba điểm cố định A, O, B (điểm O nằm trong đoạn AB). Các nửa đường thẳng Ax, By vuông góc với d và ở cùng một phía đối với d. Góc vuông $\widehat{x'Oy'}$ quay quanh O có các cạnh cắt Ax, By tại E, F. Tìm quỹ tích hình chiếu M của O trên đường thẳng EF.

Giải : *Phần thuận* : Nối MA, MB và ký hiệu các góc như trong hình 58. Do $\widehat{EOF} = \frac{\pi}{2}$ nên $O_1 + O_2 = \frac{\pi}{2}$. Và từ đó

$$E_1 + F_1 = \left(\frac{\pi}{2} - O_1 \right) + \left(\frac{\pi}{2} - O_2 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Tứ giác AOME có hai góc tại A và M vuông nên là tứ giác nội tiếp. Do đó $M_1 = E_1$.

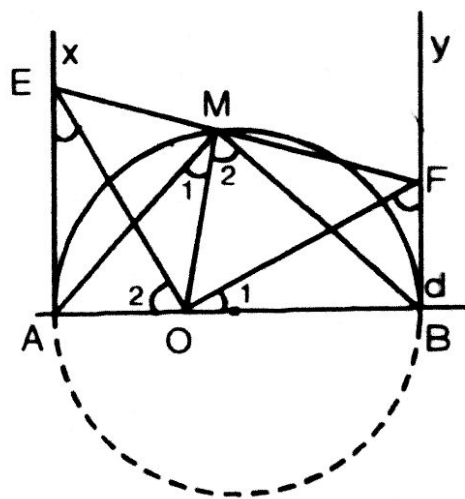
Tương tự, trong tứ giác nội tiếp BOMF ta có :

$$M_2 = F_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } \widehat{AMB} &= M_1 + M_2 = \\ &= E_1 + F_2 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Điểm M nhìn đoạn AB cố định dưới góc vuông nên sẽ nằm trên đường tròn đường kính AB.

Giới hạn : Đường thẳng d chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Điểm M phải nằm trong nửa mặt phẳng có chứa hai đường Ax, By. Do đó M chỉ nằm trên



Hình 58

nửa đường tròn đường kính AB thuộc nửa mặt phẳng đó, trừ cả hai điểm A, B.

Kết luận : Quỹ tích của M là nửa đường tròn đường kính AB, trừ A, B (vẽ nét liền trong hình 58).

Chú ý : Khi đã nắm vững các bước cần làm của một bài toán quỹ tích, có thể không cần phải tách riêng từng phần của bài toán bởi những từ ngữ thủ tục (thuận, đảo, giới hạn, kết luận) mà vẫn đảm bảo sự mạch lạc của lời giải. Từ nay, ta sẽ làm như vậy.

Ví dụ 3. Cho trên đường thẳng d ba điểm thẳng hàng theo thứ tự A, B, C. Gọi S_1 và S_2 là các nửa đường tròn đường kính AB, AC nằm về hai phía khác nhau đối với đường thẳng d. Một điểm H chuyển động trong đoạn AB. Đường thẳng vuông góc với d tại H cắt S_1 , S_2 lần lượt tại N_1 , N_2 . Hai đường thẳng N_1B và N_2C cắt nhau tại M. Tìm quỹ tích của M.

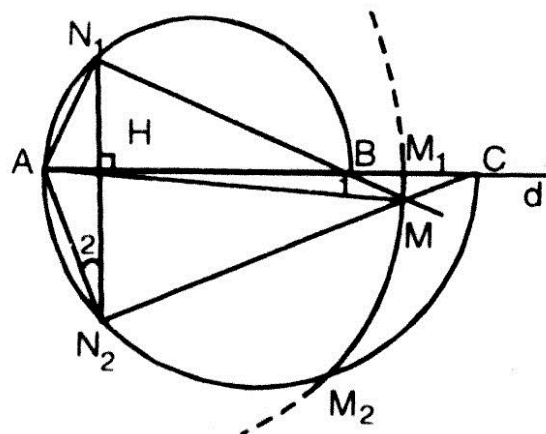
Giải : (hình 59). Đặt $AB = 2R_1$, $AC = 2R_2$; R_1 , R_2 sẽ là độ dài không đổi. $\triangle N_1AB$ vuông tại N_1 và có đường cao là N_1H nên theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có

$$N_1A^2 = AB \cdot AH = 2R_1 \cdot AH. \quad (1)$$

Tương tự, trong tam giác vuông N_2AC ta có :

$$N_2A^2 = 2R_2 \cdot AH. \quad (2)$$

Tứ giác AN_1MN_2 có hai góc vuông tại N_1 , N_2 , nên nội tiếp được. Do đó $M_1 = N_2$. Đây là hai góc nhọn của hai tam giác vuông N_1AM và HAN_2 nên suy ra $\triangle N_1AM \sim \triangle HAN_2$. Vì thế



Hình 59

$$\frac{AH}{AN_1} = \frac{AN_2}{AM}$$

Suy ra $AM \cdot AH = AN_1 \cdot AN_2$.

Thay các giá trị của $AN_1 \cdot AN_2$ tính ở (1) và (2) vào, ta được

$$AM = 2\sqrt{R_1 R_2}.$$

M cách điểm A cố định một khoảng $2\sqrt{R_1 R_2}$ không đổi nên M nằm trên đường tròn S, tâm A, bán kính $2\sqrt{R_1 R_2}$.

Mặt khác, M luôn nằm trong nửa hình tròn S_2 . Do đó quỹ tích của M chỉ là cung $\widehat{M_1 M_2}$ của S nằm trong S_2 (phần vẽ nét liền trong hình 59).

Chú ý : Có thể chứng minh được $BM_2 \perp AB$.

2) *Phương pháp vị trí giới hạn.* Phương pháp này thường dùng khi trong giả thiết của bài toán có một điểm N nào đó chuyển động kéo theo sự chuyển động của điểm M cần tìm quỹ tích. Nếu N chuyển động có giới hạn thì nói chung quỹ tích của M cũng có giới hạn. Sau khi đã tìm quỹ tích cơ bản ℓ của M (phần thuận), phần giới hạn của quỹ tích nên làm theo hai bước sau :

Bước 1 : Tìm một quy tắc đơn giản để từ mỗi vị trí cụ thể của N có thể suy ra ngay được vị trí tương ứng của M trên ℓ .

Bước 2 : Áp dụng quy tắc đó cho các vị trí giới hạn của N để tìm ra các vị trí giới hạn của M.

Ví dụ 4. Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). O là điểm giữa đoạn BC. Một điểm N chuyển động trong đoạn OA. Đường thẳng qua A, vuông góc với BN cắt BN tại M và BC tại D.

a) Tìm quỹ tích điểm M.

b) Chứng minh rằng $ND \parallel AC$; tứ giác $ONMD$ nội tiếp được và tìm quỹ tích tâm F của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.

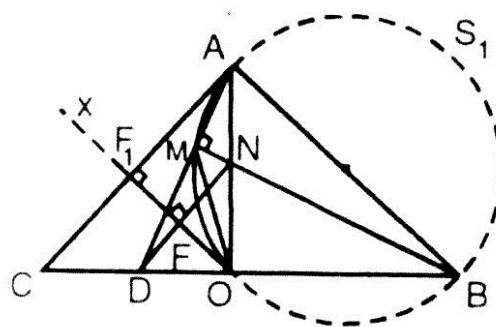
c) Tìm quỹ tích hình chiếu G của O trên AD .

d) K là điểm đối xứng của O qua AD ; tìm quỹ tích của K .

Giải : a) Điểm M nhìn đoạn AB dưới góc vuông nên nằm trên đường tròn S_1 đường kính AB . Với mỗi điểm N thuộc đoạn OA , điểm M ứng với nó là giao điểm của đường BN với S_1 . Do đó :

Khi N ở O thì M ở O .

Khi N ở A thì M ở A .



Hình 60

Vậy quỹ tích của M là cung $\widehat{OA}$ của S_1 . (Vẽ đường liền trong hình 60).

b) Tứ giác $ONMD$ có hai góc tại O và M vuông, nên nội tiếp được trong đường tròn đường kính DN . Do đó tâm F của đường tròn ngoại tiếp nó là điểm giữa đoạn DN (hình 60).

$\triangle ADB$ có hai đường cao AO và BM cắt nhau tại N nên nhận N làm trực tâm. Bởi vậy $DN \perp AB$. Do $CA \perp AB$ nên từ đó suy ra $DN \parallel CA$. Do đó $\triangle ODN$ vuông cân và điểm giữa F của cạnh huyền DN nằm trên phân giác Ox của góc vuông $\widehat{AOC}$.

Khi N thay đổi, F chính là giao điểm của DN với Ox . Do đó

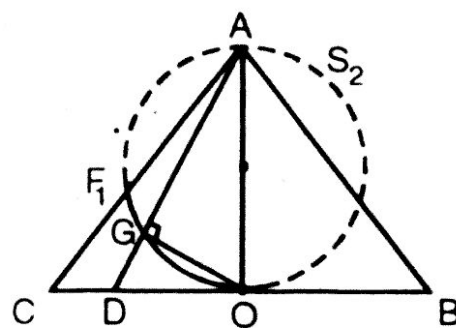
Khi N ở O thì D ở O và F cũng ở O .

Khi N ở A thì D ở C và F là điểm giữa F_1 của đoạn AC .

Do đó quỹ tích của F là đoạn OF_1 (hình 60).

c) Điểm G nhìn AO dưới góc vuông nên nằm trên đường

tròn S_2 đường kính AO. Khi N chuyển động trên AO thì D chuyển động trên OC. Và G có thể coi như giao điểm của AD và S_2 . Do đó khi D ở O thì G ở O. Khi D ở C thì G ở F_1 (điểm giữa đoạn AC).



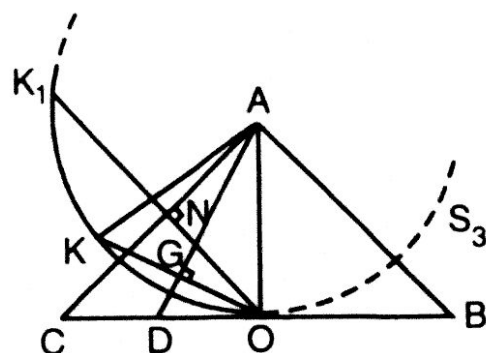
Hình 61

d) Do K đối xứng với O qua AD nên $AK = AO$. Vậy K nằm trên đường tròn tâm A bán kính AO, gọi là S_3 . Vì D chỉ chuyển động trên đoạn OC nên :

Khi D ở O thì K ở O

Khi D ở C thì K ở điểm K_1 , đối xứng với O qua AC (hình 62).

Vậy quỹ tích của K là cung $\widehat{OK_1}$ của đường tròn S_3 (phần vẽ đường liền trong hình 62). Cung này bằng $1/4$ đường tròn S_3 .



Hình 62

Ví dụ 5. Cho trên đường tròn S hai điểm cố định A, B và một điểm M chuyển động trên cung lớn AB của S, I điểm giữa đoạn AB. Tìm quỹ tích các hình chiếu H, K, E của A, B, I trên phân giác Mx của góc $\widehat{AMB}$.

Giải : Phân giác Mx cắt cung nhỏ AB của S tại điểm N.

Vì $\widehat{AMN} = \widehat{BMN}$, nên N là điểm giữa của cung nhỏ AB. Vậy N cố định. Hình chiếu H của A trên Mx luôn nhìn đoạn AN dưới góc vuông nên nó nằm trên đường tròn S_1 đường kính AN. Với điểm M trên cung lớn AB, điểm H ứng với nó có thể coi như giao điểm của MN với S_1 . Do đó :

Khi M ở A thì H ở A.

Khi M ở B thì H ở điểm A_1 là giao điểm của BN với S_1 . Vây quỹ tích của H là cung $\widehat{AA_1}$ của S_1 (phần vẽ đường liên trong hình 63).

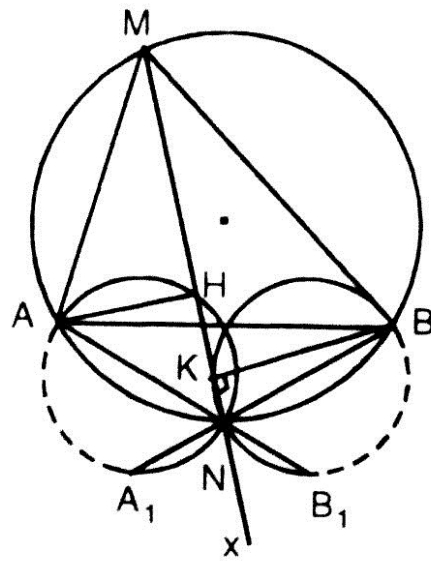
Tương tự, quỹ tích của K là cung $\widehat{BB_1}$ của đường tròn S_2 đường kính BN. Trong đó B_1 là giao điểm của đường AN với S_2 (hình 63).

Điểm E nhìn đoạn IN dưới góc vuông, nên nằm trên đường tròn S_3 đường kính IN, và là giao điểm của MN với S_2 .

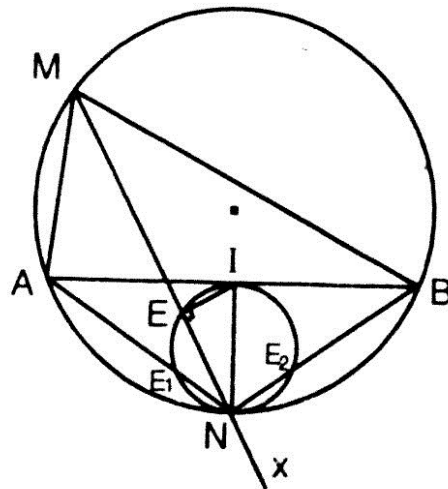
Do đó :

Khi M ở A thì E ở E_1

Khi M ở B thì E ở E_2 (hình 64). Vậy quỹ tích của E là cung $\widehat{E_1E_2}$ của đường tròn S_3 (hình 64).



Hình 63



Hình 64

§3. Tìm quý tích bằng phương pháp vị tự

Cho trước một điểm O cố định và k là một số không đổi. Nếu các điểm M, N chuyển động sao cho đường MN luôn đi qua O , và $\overline{OM} : \overline{ON} = k$, thì để tìm quỹ tích của M , ta có thể tìm quỹ tích của điểm N . Sau đó, quỹ tích của M được xây dựng bằng cách lấy vị tự quỹ tích vừa tìm được theo phép vị tự tâm O , tỷ số k .

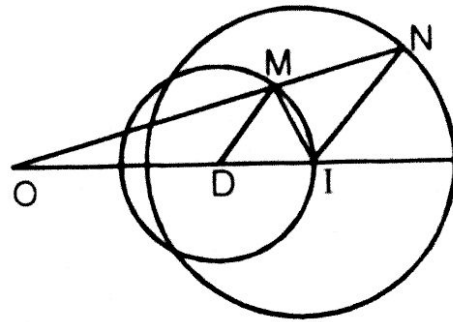
Ví dụ 1. Cho đường tròn S (I, R) và một điểm O cố định sao cho $OI = 2R$. Một điểm N chuyển động trên S , phân giác góc $\widehat{NIO}$ cắt ON tại M . Tìm quỹ tích điểm M .

Giải : (hình 65). Trong $\triangle NOI$, theo tính chất của đường phân giác, ta có :

$$\frac{OM}{MN} = \frac{OI}{NI} = \frac{2R}{R} = 2,$$

$$\text{suy ra } \frac{OM}{ON} = \frac{OM}{OM + MN} =$$

$$= \frac{2}{2 + 1} = \frac{2}{3}$$



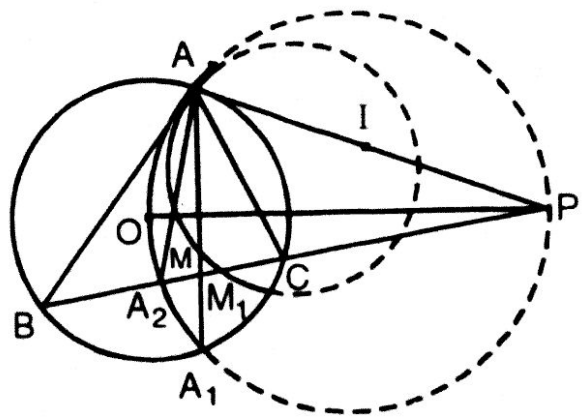
Hình 65

Do đó M nhận được từ N qua phép vị tự tâm O , tỷ số $2/3$. Do N chuyển động trên S nên M chuyển động trên đường tròn S' nhận được từ S qua phép vị tự đã nêu. S' có thể xây dựng như sau : trên đoạn OI lấy điểm D thỏa mãn $\frac{OD}{OI} = \frac{2}{3}$, ($MD \parallel NI$).

Đường tròn tâm D , bán kính $R' = \frac{2R}{3}$ chính là S' (hình 65).

Ví dụ 2. Cho đường tròn S tâm O và một điểm P cố định ngoài S . Kẻ tiếp tuyến PA của S . Đường thẳng d thay đổi luôn qua P và cắt S tại 2 điểm B, C . Tìm quỹ tích trọng tâm $\triangle ABC$.

Giải : Gọi M là trọng tâm $\triangle ABC$ và N là điểm



Hình 66

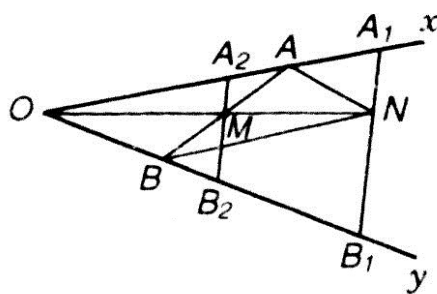
giữa đoạn BC. Theo ví dụ 1 của §2, quỹ tích của N là cung $\widehat{AA_1}$ của đường tròn đường kính OP. Mặt khác, do M là trọng tâm ΔABC nên A, M, N thẳng hàng và $\frac{AM}{AN} = \frac{2}{3}$. Do đó quỹ tích của M sẽ là cung tròn $\widehat{AM_1}$ nhận được từ cung $\widehat{AA_1}$ bởi phép vị từ tâm A, tỷ số 2 : 3 (hình 66).

Cung này có thể dựng như sau : Trong đoạn AI (I là điểm giữa OP) lấy điểm J thỏa mãn $\frac{AJ}{AI} = \frac{2}{3}$.

Đường tròn S_1 tâm J bán kính JA cắt AA_1 tại điểm M_1 . Cung $\widehat{AM_1}$ của S_1 là quỹ tích của M (phần vẽ bởi đường liền trong hình 66).

Ví dụ 3. Cho góc $\widehat{xOy}$ và một độ dài a không đổi. Các điểm A, B lần lượt chuyển động trên các tia Ox, Oy sao cho $OA + OB = a$. Tìm quỹ tích điểm giữa M của đoạn AB.

Giải : Trên các tia Ox, Oy lấy các điểm A_1, B_1 sao cho $OA_1 = OB_1 = a$. A_1, B_1 sẽ là các điểm cố định và OA_1B_1 là tam giác cân.



Hình 67

Do ΔOA_1B_1 cân, nên ΔAA_1N_1 cũng cân và $AN = AA_1 = OA_1 - OA = a - OA = OB$. Suy ra $AN \parallel OB$.

Vậy ANBO là hình bình hành. Do đó, điểm giữa M của AB cũng là điểm giữa của ON.

Do $OA \leq OA + OB = a = OA_1$, nên điểm A chỉ chuyển động trong đoạn OA_1 . Bởi vậy điểm N chuyển động trong đoạn A_1B_1 . Điểm M vị tự với điểm N theo tâm O, tỷ số $1/2$, do đó sẽ chuyển động trong đoạn A_2B_2 , trong đó A_2 là điểm giữa OA_1 và B_2 là giữa điểm OB_1 (hình 67).

BÀI TẬP

1. Cho trước góc $\widehat{xOy}$ và một độ dài a không đổi. M là điểm thay đổi ở miền trong của góc $\widehat{xOy}$. Gọi H, K là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Tìm quỹ tích các điểm M thỏa mãn điều kiện $MH - MK = a$.

2. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, bán kính R. a) Gọi I là điểm giữa BC và M là một điểm tùy ý trong mặt phẳng của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$MA^2 + 2MI^2 = 3MO^2 + \frac{3R^2}{2}.$$

b) Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{15}{4} R^2.$$

3. Cho góc vuông $\widehat{xOy}$. Tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = 2$, $AB = 1$, thay đổi sao cho các đỉnh B, C lần lượt trên các tia Ox, Oy. Tìm quỹ tích đỉnh A.

4. Cho hình vuông ABB_1A_1 . Một điểm M chuyển động trong đoạn AB. Về cùng phía với hình vuông đã cho dựng các hình vuông AMCD, MBEF có tâm lần lượt là P, Q. Đường tròn ngoại tiếp của hai hình vuông vừa dựng cắt nhau tại điểm thứ hai N ($N \neq M$).

a) Tìm quỹ tích các điểm P, Q.

b) Tìm quỹ tích điểm N.

c) Chứng minh rằng AE và BC cùng đi qua N.

d) Tìm quỹ tích điểm giữa I của đoạn PQ.

e) Tìm quỹ tích hình chiếu H của A_1 trên đường MN.

f) Tìm quỹ tích hình chiếu K của B_1 trên đường thẳng MN.

5. Cho góc $\widehat{xOy} = \frac{\pi}{6}$. Các điểm A, B lần lượt chuyển động trên Ox, Oy sao cho độ dài đoạn AB luôn bằng độ dài a cố định.

a) Tìm quỹ tích tâm I của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$.

b) AA' , BB' là đường cao của $\triangle OAB$. Chứng minh rằng độ dài $A'B'$ không đổi.

c) Tìm quỹ tích tâm K của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OA'B'$.

d) Tìm quỹ tích trực tâm H của $\triangle OAB$.

6. Cho đường tròn S đường kính $AB = 2R$. H là điểm thuộc đoạn AB thỏa mãn $\frac{AH}{HB} = \frac{5}{3}$, m là đường thẳng vuông góc với AB tại H và M là một điểm chuyển động trên m. Đường thẳng AM cắt lại S tại N. Đường thẳng qua M vuông góc với AN cắt S tại P và Q. Tìm quỹ tích các điểm giữa I, J của các dây cung NP, NQ.

7. Cho tam giác ABC bất kỳ, điểm D chuyển động trên đáy BC. Đường tròn nội tiếp trong $\triangle ABD$ tiếp xúc với BC tại H, với AD tại K. Đường tròn nội tiếp trong $\triangle ACD$ tiếp xúc với BC tại I, với AD tại J. Tìm quỹ tích giao điểm M của các đường thẳng HK và IJ.

8. Cho một nửa đường tròn tâm O bán kính R_1 . Tìm quỹ tích tâm của đường tròn nhỏ bán kính R_2 không đổi, cắt nửa đường tròn đã cho :

a) chỉ tại 1 điểm ;

b) tại 2 điểm.

Chứng minh rằng : $S_a + 2S_b = 4\pi R_1 \cdot R_2$, trong đó S_a , S_b là các diện tích các miền của mỗi quỹ tích tương ứng trên câu a) và câu b).

9. Cho một vòng tròn tâm O và 2 điểm B, C cố định trên nó, A chuyển động cũng trên O, H là trực tâm của $\triangle ABC$. a) Tìm quỹ tích trọng tâm của $\triangle AHO$. b) Tìm quỹ tích chân D của đường phân giác trong của góc A của $\triangle AHO$.

10. Cho 2 đường thẳng a, b song song với nhau và cách nhau một khoảng bằng 3. Một điểm O cố định nằm ngoài dải phẳng tạo bởi a, b và cách a một khoảng bằng 1. Một cát tuyến thay đổi cắt a, b lần lượt tại A, B sao cho $OA : OB = 1 : 2$. Tìm quỹ tích những điểm trong mặt phẳng mà không có đường thẳng nào đi qua.

11. Cho đường thẳng d cố định qua một điểm A cố định. Một điểm B cố định ngoài d. Một đường tròn tâm O thay đổi luôn qua A và cắt d tại C. Tìm quỹ tích điểm giữa I của OC.

12. Tìm quỹ tích của điểm M chạy trên một hình vuông ABCD cố định, sao cho $MI - MJ = MJ - MH = MH = MK \geq 0$, trong đó MH, MI, MJ, MK lần lượt là khoảng cách từ M đến AB, BC, CD và DA.

B. QUỸ TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

§4. Các quỹ tích cơ bản

Yêu cầu và cách trình bày một bài toán quỹ tích trong không gian hoàn toàn giống như quỹ tích trong mặt phẳng.

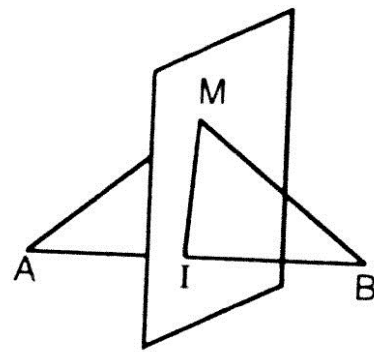
Ở đây ta chỉ đề cập bài toán tìm quỹ tích của điểm M chuyển động trong không gian, thỏa mãn một vài điều kiện xác định,

mà không nói đến bài toán tìm quỹ tích các đường thẳng trong không gian, thỏa mãn các điều kiện đó.

Dưới đây là một số quỹ tích cơ bản trong không gian (là các mặt phẳng và mặt cầu) thường gặp nhất.

1) Các quỹ tích cơ bản là mặt phẳng.

Quỹ tích 1 : Cho trước hai điểm A, B. Quỹ tích những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện $MA = MB$ là mặt phẳng trung trực của đoạn AB (mặt phẳng vuông góc với đoạn AB tại điểm giữa I của nó) (hình 68).



Quỹ tích 2 : Cho trước đường thẳng d và một điểm H cố định trên nó. Quỹ tích những điểm M trong không gian có hình chiếu trên d là H ($MH \perp d$), là mặt phẳng vuông góc với d tại H.

Quỹ tích 3 : Cho trước đường thẳng d và một điểm A cố định. Quỹ tích những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện $MA \perp d$ là mặt phẳng đi qua A, vuông góc với d.

Hình 68

Quỹ tích 4 : Cho trước hai điểm A, B và một độ dài k cố định. Quỹ tích những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện $MA^2 - MB^2 = k^2$ là một mặt phẳng vuông góc với đường AB tại điểm H, nằm cùng phía với B đối với điểm A và được xác định bởi điều kiện

$$IH = \frac{k^2}{2AB} \quad (I \text{ là điểm giữa } AB).$$

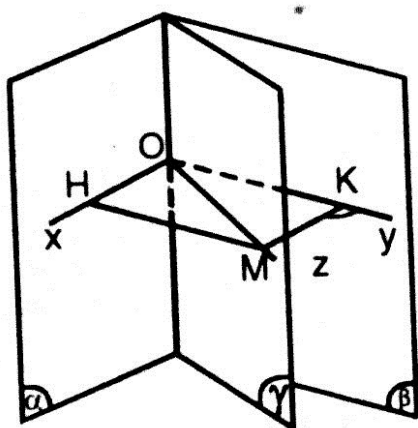
Quỹ tích 5 : Cho trên mặt phẳng α một đường thẳng d cố định. Quỹ tích những điểm M trong không gian có hình chiếu vuông góc xuống α nằm trên d là mặt phẳng β vuông góc với α theo giao tuyến d (hình 69).

Quỹ tích 6 : Cho nhị diện $\alpha d \beta$. Quỹ tích những điểm M nằm ở miền trong của nhị diện và cách đều hai mặt của nó là mặt phân giác của nhị diện (hình 70).

Chú ý : a) Cho một góc nhị diện $\alpha d \beta$. Mặt phẳng qua d và chia đôi góc nhị diện đã cho gọi là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện đó. Mặt phẳng phân giác

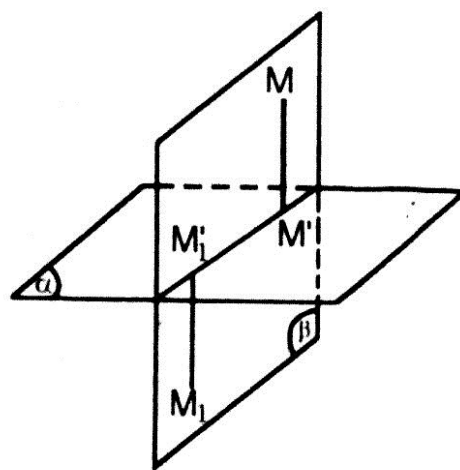
có thể xác định bởi d và một đường phân giác trong của góc phẳng nhị diện đã cho, hoặc theo kết quả của quỹ tích 6, bởi d và một điểm M nào đó cách đều α và β (hình 70).

Ngược lại nếu γ là mặt phân giác của nhị diện $\alpha d \beta$, mặt phẳng P vuông góc với d cắt α, β, γ theo các tia Ox, Oy, Oz thì Oz là đường phân giác trong của góc $\widehat{xOy}$ (hình 70).



Hình 70

phẳng $\alpha \parallel \beta$. Quỹ tích những điểm M trong không gian cách đều hai mặt phẳng đó là một mặt phẳng γ song song với α, β và cách đều 2 mặt phẳng đó. (γ được gọi là *mặt phẳng trung bình* của cặp mặt phẳng α, β).



Hình 69

b) Cho hai mặt phẳng α, β cắt nhau theo giao tuyến d. Quỹ tích những điểm M trong không gian cách đều hai mặt phẳng này là hai mặt phẳng γ_1, γ_2 vuông góc với nhau theo giao tuyến d. Ta gọi đó là cặp mặt phẳng phân giác của hai mặt α, β .

Quỹ tích 7 : Cho hai mặt

2) Các quỹ tích cơ bản là mặt cầu.

Ngoài định nghĩa : "tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cho trước một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, ký hiệu $S(O, R)$ " ta còn hay gặp các quỹ tích sau :

Quỹ tích 8 : Cho trước hai điểm A, B. Quỹ tích những điểm M trong không gian nhìn đoạn AB dưới góc vuông ($\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$) là một mặt cầu đường kính AB.

Quỹ tích 9 : Với hai điểm A, B cố định và k là một độ dài cho trước ($k \geq \frac{AB\sqrt{2}}{2}$). Quỹ tích những điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện $MA^2 + MB^2 = k^2$ là một mặt cầu có tâm là điểm giữa O của đoạn AB và bán kính

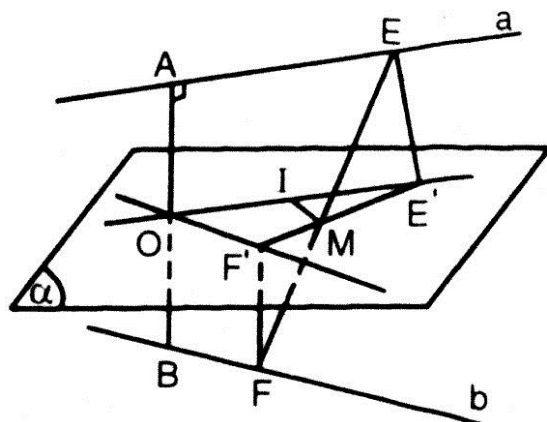
$$R = \frac{1}{2} \sqrt{2k^2 - AB^2}.$$

Sau đây là một vài ví dụ minh họa cách giải bài toán tìm quỹ tích không gian.

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b nhận AB làm đường vuông góc chung ($A \in a, B \in b$). Các điểm E, F lần lượt chuyển động trên a, b. Chứng minh rằng quỹ tích điểm giữa M của đoạn EF là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Giải : Gọi α là mặt phẳng trung trực của AB và O là điểm giữa đoạn này ($O \in \alpha$). Do $a \perp AB, b \perp AB$ nên $a, b \parallel \alpha$. Bởi vậy hình chiếu a', b' của a, b trên α là các đường thẳng qua O, song song với a, b. Gọi E', F' là hình chiếu của E, F trên α ta có $E' \in a', F' \in b'$ (hình 71).

Do $AE \parallel OE'$ và $OA \parallel EE'$ nên ta có $OA = EE'$, tương tự $OB = FF'$. Do đó $EE' = FF'$. Vậy tứ giác $EE'FF'$ là hình bình hành, do đó điểm giữa M của EF cũng là điểm giữa của $E'F'$. Vậy $M \in \alpha$.



Hình 71

Đảo lại, lấy một điểm M tùy ý thuộc α . Ta cần chứng minh rằng có các điểm $E \in a$, $F \in b$ để đoạn EF nhận M làm điểm giữa (hình 71).

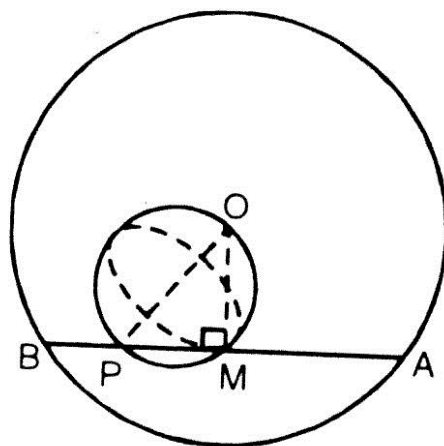
Đường thẳng qua M , song song với b' cắt a' tại I ; trên a' lấy điểm $E' \neq O$ sao cho $OI = IE'$. Đường $E'M$ cắt b' tại F . Theo cách dựng $\triangle OE'F'$ nhận MI làm đường trung bình nên M là điểm giữa đoạn $E'F'$. Dựng các hình bình hành $AOE'E$, $BOF'F$. Dễ chứng minh được $E \in a$, $F \in b$ và $EE' = FF'$. Do đó tứ giác $EE'FF'$ là hình bình hành. Vậy điểm giữa M của $E'F'$ cũng là điểm giữa của EF .

Chú ý : Quỹ tích của ví dụ này cũng thường được dùng. Bạn đọc nên coi nó ngang hàng với các quỹ tích cơ bản,

Ví dụ 2. Cho một điểm P cố định nằm trong mặt cầu S tâm O , bán kính R . Một đường thẳng d chuyển động luôn qua P cắt S tại hai điểm A, B . Tìm quỹ tích :

- Điểm giữa M của đoạn AB .
- Điểm giữa N của đoạn PA .
- Trọng tâm G của $\triangle OPA$.

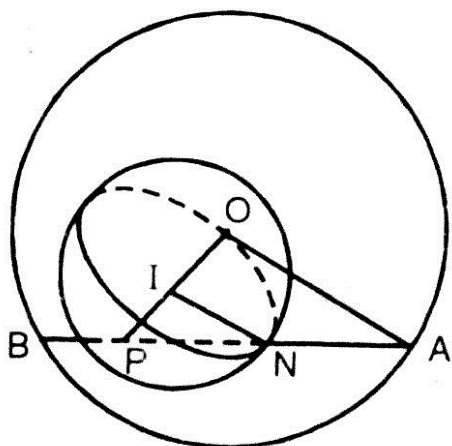
Giải : a) Do M là điểm giữa dây AB của mặt cầu S nên $OM \perp AB$. Điểm M nhìn đoạn OP cố định dưới góc vuông nên nằm trên một cầu S_1 đường kính OP (hình 72).



Hình 72

Đảo lại, với mỗi điểm $M \in S_1$, đường thẳng MP cắt S tại A, B. Do $M \in S_1$, nên $MO \perp AB$. Vì thế M phải là điểm giữa đoạn AB.

Vậy quỹ tích của M là mặt cầu S_1 .



Hình 73

b) Gọi I là điểm giữa đoạn OP, I cố định. $\triangle OPA$ nhận IN là đường trung bình, nên $IN = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} R$. Điều này chứng tỏ N nằm trên mặt cầu S_2 , tâm I, bán kính bằng $R/2$. Bạn đọc tự chứng minh phần đảo để kết luận quỹ tích của N là cả mặt cầu này (hình 73).

c) Do G là trọng tâm $\triangle OPA$ nên G nằm trên trung tuyến.

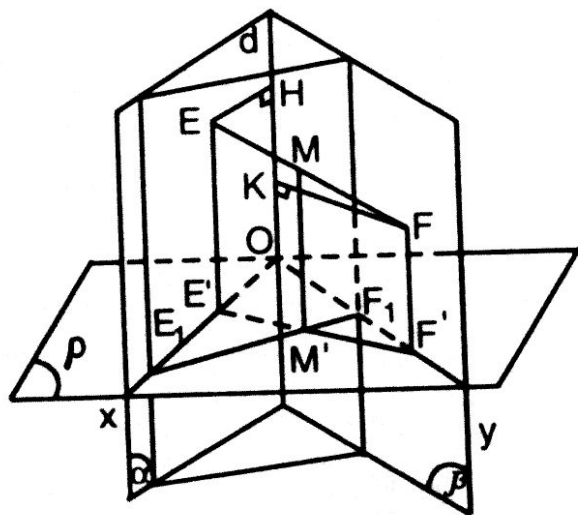
AI và $\frac{IG}{IA} = \frac{1}{3}$. Bởi vậy G sẽ

nằm trên mặt cầu S_3 nhận được từ S qua phép vị tự tâm I, tỷ số $1/3$. Tâm của mặt cầu S_3 là điểm K nằm trong đoạn IO, thỏa mãn $IK = \frac{1}{3} IO$, còn bán kính của S_3 là $\frac{R}{3}$ (hình 74).

Ví dụ 3. Cho nhị diện $\widehat{\alpha d \beta}$. Các điểm E, F lần lượt chuyển động trên α, β sao cho tổng khoảng cách từ E và F đến đường thẳng d luôn bằng một độ dài a cho trước. Tìm quỹ tích điểm giữa M của đoạn EF.

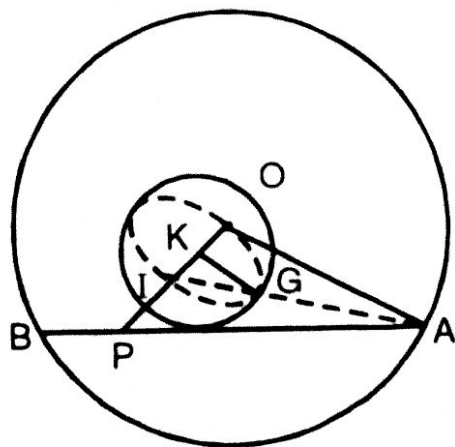
Giải : Hạ EH, FK cùng vuông góc với d. Theo giả thiết ta có $EH + FK = a$.

Lấy một điểm O cố định trên d và gọi P là mặt phẳng vuông góc với d tại O, P cắt α, β theo các giao tuyến Ox, Oy. Gọi E', F', M' là hình chiếu của E, F, M trên P. Như vậy M' sẽ là điểm giữa đoạn E'F'. Dễ thấy $E' \in Ox, F' \in Oy$ và $OE' = HE, OF' = KF$. Vậy $OE' + OF' = HE + KF = a$ (hình 75).



Hình 75

và $OE_1 = OF_1 = a/2$ (hình 75). Hình chiếu trên P của M nằm trong đoạn E_1F_1 nên quỹ tích của M sẽ là dải phẳng giới hạn bởi đường d_1, d_2 lần lượt qua E_1, F_1 và cùng song song với d (hình 75).



Hình 74

Trên mặt phẳng P, các điểm E', F' chuyển động trên Ox, Oy thỏa mãn $OE' + OF' = a$ nên theo ví dụ 3 §3, quỹ tích điểm giữa M' của E'F' sẽ là đoạn E_1F_1 . Trong đó $E_1 \in Ox, F_1 \in Oy$

§5. Quỹ tích phẳng trong không gian

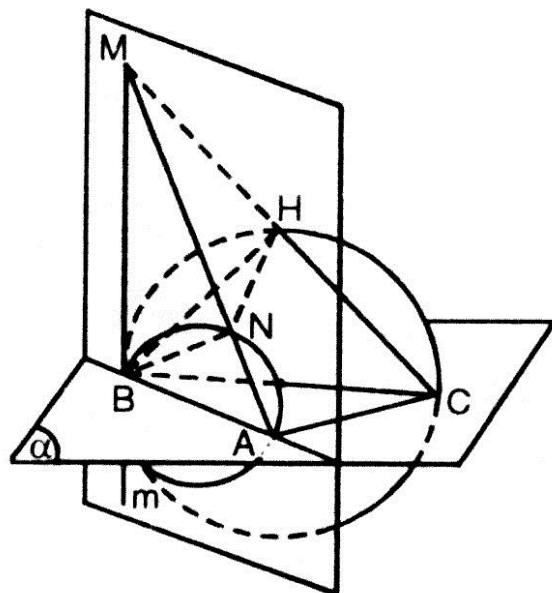
Những bài toán quỹ tích, tuy trong giả thiết có mang các yếu tố không gian, nhưng quỹ tích tìm được lại là một quỹ tích trong mặt phẳng được gọi là các *quỹ tích phẳng trong không gian*. Khi đã đoán nhận một quỹ tích là quỹ tích phẳng trong không gian, bạn đọc nên trình bày bài toán đó theo hai bước sau :

a) *Bước 1* : Xác định rõ mặt phẳng α cố định, luôn chứa điểm M cần tìm quỹ tích.

b) *Bước 2* : Chuyển các điều kiện ràng buộc M trong không gian thành các điều kiện tương ứng của M trên mặt phẳng α . Ta nhận được một bài toán quỹ tích của M trong mặt phẳng này và giải bài toán đó.

Ví dụ 1. Cho trên mặt phẳng α một tam giác ABC vuông tại A. Đường thẳng $m \perp \alpha$ tại B, M là một điểm chuyển động trên m. Mặt phẳng qua B, vuông góc với MC cắt MA tại N, MC tại H. Tìm quỹ tích của N, H.

Giải : (hình 76). Do A, m cố định nên mặt phẳng β xác định bởi A và m là mặt phẳng cố định. Do N thuộc MA nên N nằm trong mặt phẳng β . Vậy quỹ tích cần tìm là quỹ tích phẳng trên mặt phẳng β . Ta cần chuyển điều kiện "BN nằm trong mặt phẳng vuông góc với MC" thành một điều kiện của N trong mặt phẳng (A, m).



Hình 76

Theo giả thiết $MC \perp (BNH)$, nên $MC \perp BN$. (1)

Mặt khác, do $CA \perp AB$, $CA \perp MB$, nên $CA \perp (MAB)$.

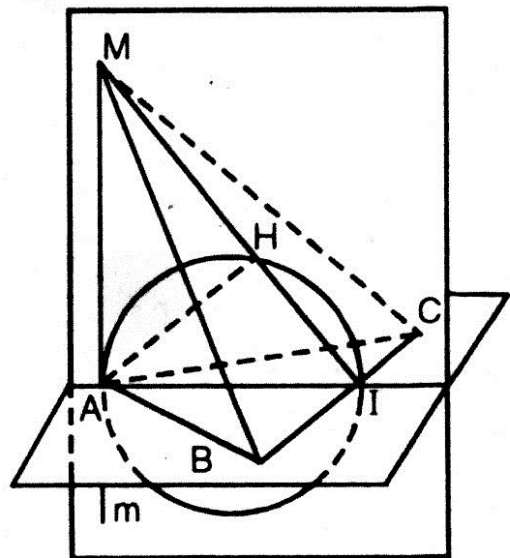
Vậy $CA \perp BN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BN \perp (MAC)$. Do đó $BN \perp NA$. Trong mặt phẳng β , điểm N nhìn đoạn AB dưới góc vuông, nên sẽ nằm trên đường tròn S đường kính AB của mặt phẳng này.

Khi M chuyển động trên m, điểm N là giao điểm của MA và S, do đó thấy được quỹ tích của N là đường tròn S, trừ điểm A.

Bạn đọc hãy tự chứng minh rằng quỹ tích của H là đường tròn đường kính BC nằm trên mặt phẳng $\gamma = (C, m)$, bỏ đi điểm C.

Ví dụ 2. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Một điểm M chuyển động trên đường thẳng m vuông góc với mặt phẳng của tam giác ABC tại A. Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên mặt phẳng (MBC).



Hình 77

Giải : (hình 77). Ta có :

Do $MA \perp (ABC)$, nên $MA \perp BC$. (1)

Do $AH \perp (MBC)$, nên $AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (MAH)$.

Do đó $MH \perp BC$. Vậy MH là đường cao của tam giác MBC.

Do $AB = AC$ nên dễ thấy $MB = MC$. Tam giác MBC cân nên đường cao MH sẽ cắt BC tại điểm giữa I của đoạn này. Như vậy (I, m) là mặt phẳng cố định, luôn chứa điểm H . Trong mặt phẳng này, do $AH \perp HI$ nên H nằm trên đường tròn S , đường kính AI . Dễ thấy khi M chạy trên m , thì H , là giao điểm của MI với S , sẽ chạy trên cả đường tròn S , trừ điểm I (hình 77).

Ví dụ 3. Cho trên mặt phẳng α đường tròn S đường kính AB . Đoạn SA vuông góc với α và một điểm M chuyển động trên đường tròn đã cho. Tìm quỹ tích hình chiếu N của A trên đường SM .

Giải : (hình 78).

Xét đường MB , ta có :

AB là đường kính của S nên

$$MB \perp MA \quad (1)$$

và $SA \perp \alpha$ nên $MB \perp SA$; (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MB \perp (SAM)$.

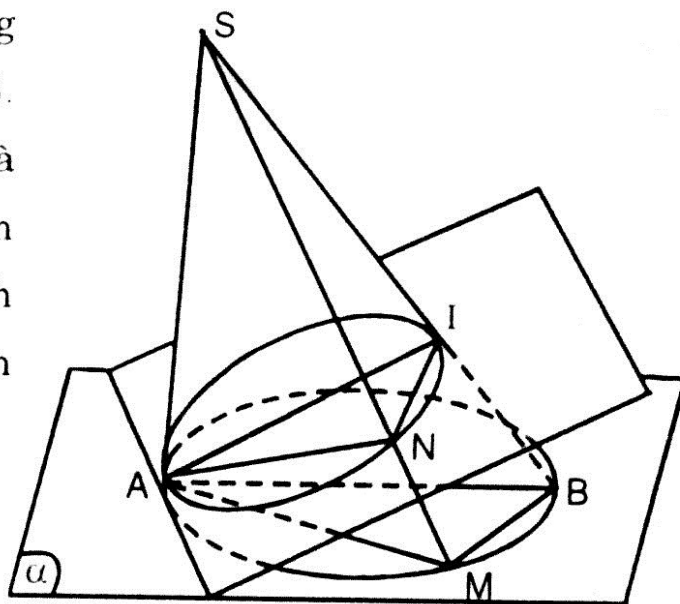
Do đó $MB \perp AN$. (3)

Mặt khác, theo giả thiết, ta lại có : $SM \perp AN$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra :

$AN \perp (SMB)$. Do đó ta được $AN \perp SB$. (5)

Do A, SB cố định nên (5) chứng tỏ N nằm trên mặt phẳng β cố định, đi qua A và vuông góc với SB , β cắt SB tại một điểm

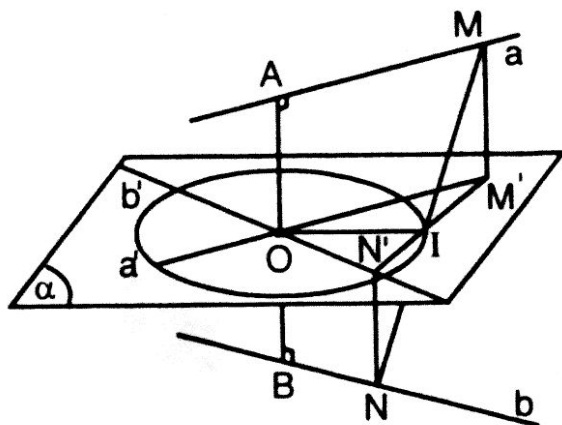


Hình 78

I cố định (là hình chiếu của A trên đường SB). Trong mặt phẳng này điểm N nhìn đoạn AI dưới góc vuông (do $AN \perp (SMB) \Rightarrow AN \perp NI$) nên sẽ nằm trên đường tròn S_1 đường kính AI.

Khi M chạy trên cả đường tròn S thì N sẽ chạy trên cả đường tròn S_1 . Vậy quỹ tích của N là đường tròn S_1 .

Ví dụ 4. Cho hai đường thẳng a, b chéo nhau, vuông góc với nhau và cách nhau một khoảng h. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên a, b sao cho độ dài đoạn MN luôn bằng k không đổi. Tìm quỹ tích điểm giữa I của đoạn MN.



Hình 79

Giải : Gọi AB là đường vuông góc chung của a, b ($A \in a, B \in b$), ta có A, B cố định, và theo giả thiết, $AB = h$. Ký hiệu α là mặt phẳng trung trực của đoạn AB và O là điểm giữa đoạn này. Theo ví dụ 1 §4, điểm giữa I của MN sẽ luôn luôn nằm trên α (hình 79).

Gọi a', b' là hình chiếu của a, b trên α . Ta có $a' \parallel a, b' \parallel b$. Do $a \perp b$ nên suy ra a' và b' vuông góc với nhau tại O. Ký hiệu M', N' là hình chiếu của M, N trên α , ta có $M' \in a', N' \in b'$. Đồng thời

$$MM' = NN' = \frac{1}{2} AB.$$

Vậy I cũng là điểm giữa đoạn $M'N'$. Do đó :

$$OI = \frac{1}{2} M'N' = IM' = \sqrt{IM^2 - MM'^2} = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - h^2}. \quad (1)$$

(1) Chứng tỏ I nằm trên đường tròn S , tâm O , bán kính $R = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - h^2}$ của mặt phẳng α .

Đảo lại, lấy một điểm I tùy ý trên S , theo cách dựng trong phần đảo của ví dụ 1 §4, ta dựng được hình bình hành $MM'NN'$ nhận I làm tâm ($M \in a$, $M' \in a'$, $N \in b$, $N' \in b'$). Vậy chỉ cần chứng minh $MN = k$. Ta có :

$$\begin{aligned} MN &= 2IM = 2\sqrt{IM'^2 + MM'^2} = 2\sqrt{OI^2 + MM'^2} = \\ &= 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} \sqrt{k^2 - h^2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = k. \end{aligned}$$

Vậy quỹ tích của I là cả đường tròn S .

Chú ý : a) Khi đã tìm được mặt phẳng α cố định luôn chứa điểm M , quỹ tích của M còn có thể tìm bằng cách : Xác định quỹ tích không gian của M (mặt phẳng, hoặc mặt cầu) và lấy giao của quỹ tích đó với α . Các quỹ tích trong ví dụ 1, 2, 3, 4 đều có thể giải theo cách đó. Tuy nhiên, nếu quỹ tích này có giới hạn, hoặc ngoài câu hỏi về tìm quỹ tích bài toán còn có những câu hỏi khác, liên quan đến quỹ tích M , thì cách giải này thường ít có hiệu lực để góp phần giải các phần đó.

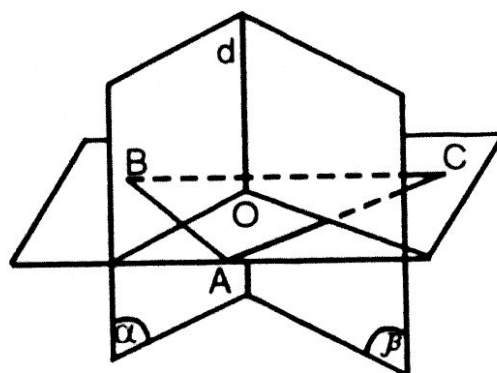
b) Nếu tìm được hai mặt phẳng cố định, cùng chứa M , thì quỹ tích của M sẽ nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Ta chỉ cần xét thêm phần giới hạn là được⁽¹⁾.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích những điểm M trong không gian, thỏa mãn điều kiện

$$MA = MB = MC.$$

(1) Trong những trường hợp ít gặp hơn, quỹ tích phẳng trong không gian có thể tìm như giao của hai mặt cầu cố định.

Giải : Với điểm M đang xét, ta có $MA = MB$ nên M nằm trên mặt phẳng trung trực α của đoạn AB . Do $MA = MC$ nên M cũng nằm trên mặt phẳng trung trực β của đoạn AC . Do đó M nằm trên giao tuyến d của α và β (hình 80).



Hình 80

Để chứng minh được mọi điểm $M \in d$ đều thỏa mãn điều kiện đã cho. Do đó quỹ tích cần tìm là đường thẳng d .

Chú ý : Đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng của ΔABC tại tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác này, thường được gọi là trục của tam giác đang xét. Chú ý rằng d chính là quỹ tích tâm của các mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C .

Với một đa giác phẳng nội tiếp được trong đường tròn ; đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của đa giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp của nó cũng được gọi là trục của đa giác đang xét. Để chứng minh được rằng đó là quỹ tích tâm của các mặt cầu đi qua các đỉnh của đa giác đã cho và cũng chính là quỹ tích những điểm cách đều các đỉnh của đa giác đó.

Ví dụ 6. Hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Cạnh SA vuông góc với đáy. M, N là điểm giữa các đoạn SB, SC . Một điểm Q chuyển động trong đoạn SA . Mặt phẳng (MNQ) cắt SD tại điểm P .

a) Xác định hình dạng của tứ giác $MNPQ$.

b) Tìm quỹ tích giao điểm I của MP và NQ ; giao điểm K của hai đường MQ và NP .

c) Tìm quỹ tích hình chiếu H của S trên mặt phẳng MNQ.

Giải : a) Theo giả thiết, ta có : $BC \perp AB$, $BC \perp SA$, do đó $BC \perp (SAB)$. Mặt khác MN là đường trung bình của SBC : $MN \parallel BC$, do đó $MN \perp (SAB)$.

Vậy $MN \perp MQ$. (1)

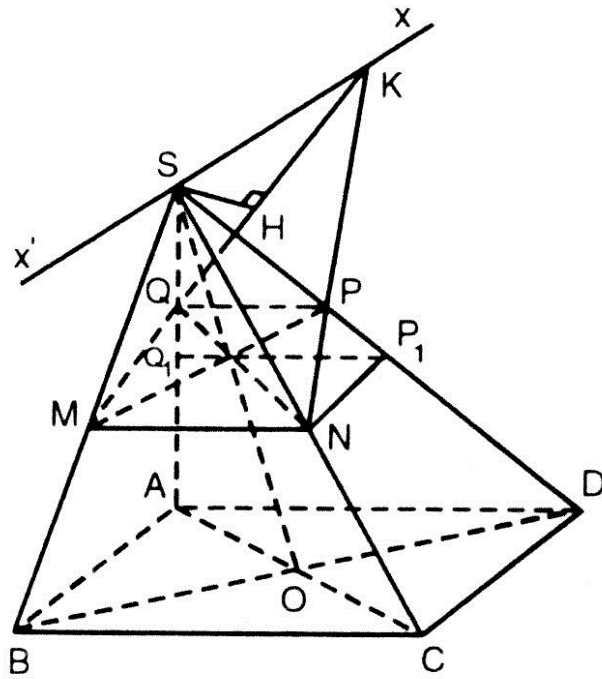
Cũng do $MN \parallel BC$ nên $MN \parallel AD$. Do đó giao tuyến PQ của mặt phẳng (MNQ) với mặt phẳng (SAD) sẽ song song với cả hai đường này.

Vậy $MN \parallel PQ$.

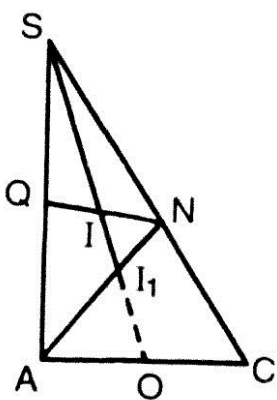
(2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác MNPQ là hình thang vuông.

Đặc biệt khi Q trùng với điểm giữa Q_1 của SA thì tứ giác này là hình chữ nhật. Lúc đó P sẽ trùng với điểm giữa P_1 của SD (hình 81).



Hình 81



Hình 82

b) Xét $I = MP \times NQ$. Do $I \in MP$ nên I nằm trên mặt phẳng (SBD) cố định. Do $I \in NQ$ nên I nằm trên mặt phẳng (SAC) cố định.

Vậy I nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng này. Gọi O là tâm của đáy. Để thấy giao điểm của hai mặt phẳng đó là đường thẳng SO.

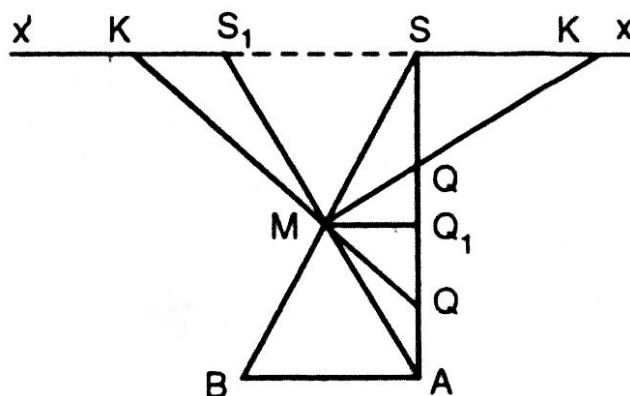
Xét tam giác SAC. Khi Q chuyển động, điểm I chính là giao điểm của QN với SO. Do đó :

Khi Q ở S thì I ở S.

Khi Q ở A thì I ở I_1 , là giao của AN với SO. Dễ thấy I_1 là trọng tâm ΔSAC . Vậy quỹ tích của I là đoạn SI_1 (hình 82).

Do MQ nằm trong mặt phẳng (SAB), NP nằm trong mặt phẳng (SCD), nên giao điểm K của chúng nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng này. Vì $AB \parallel CD$ nên giao tuyến là đường thẳng $x'Sx$ song song với AB (hình 81).

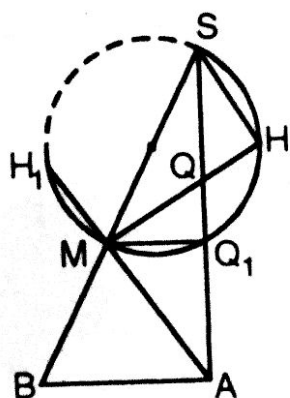
Trong mặt phẳng (SAB), với mỗi vị trí của Q trong đoạn SA, điểm K là giao điểm của MQ và $x'Sx$. Do đó khi Q chuyển động trong đoạn SQ_1 thì K chạy trên tia Sx . Khi Q chuyển động trong đoạn AQ_1



Hình 83

thì K chạy trên tia Sx . Khi Q chuyển động trong đoạn AQ_1 thì K chạy trên tia S_1x' . Trong đó S_1 là giao điểm của AM và $x'Sx$. Khi Q là điểm giữa Q_1 của SA thì không có điểm K (MNP_1Q_1 là hình chữ nhật).

Vậy quỹ tích cần tìm là hai tia Sx và S_1x' (hình 83).



Hình 84

c) Trong mặt phẳng (SAB) dựng $SH \perp MQ$ ($H \in MQ$). Theo chứng minh trên $MN \perp (SAB)$ nên $MN \perp SH$. Do $SH \perp MQ$ và $SH \perp MN$ nên $SH \perp (MNQ)$. Vậy H chính là hình chiếu của S trên

mặt phẳng (MNQ). Do đó : H luôn nằm trong mặt phẳng (SAB). Trong mặt phẳng này H nhìn đoạn SM dưới góc vuông. Vậy H nằm trên đường tròn đường kính SM của mặt phẳng (SAB).

Khi Q chạy trên SA, H sẽ là giao điểm của MQ với đường tròn quỹ tích. Do đó, quỹ tích cần tìm sẽ là cung SH_1 của đường tròn này, trong đó H_1 là giao điểm của AM với đường tròn đang nói tới (cung vẽ liên nét trong hình 84).

BÀI TẬP

CHƯƠNG III (tiếp)

13. Cho trên mặt phẳng P một góc $\widehat{xOy} = \alpha$. Tìm quỹ tích những điểm M trong không gian có hình chiếu H, K trên tia Ox, Oy sao cho $MH = MK$. Chứng minh rằng đây cũng là quỹ tích những điểm M làm cho tia OM lập với Ox, Oy những góc nhọn bằng nhau.

Chứng minh rằng quỹ tích những điểm M thỏa mãn $\widehat{MOx} = \widehat{MOy} = \pi/3$, là 2 tia Oz, Oz'. Xác định giá trị góc nghiêng của Oz trên P, từ đó suy ra giá trị góc $\widehat{zOz'}$. Tính các góc đó trong trường hợp $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

14. Cho trước đoạn AB có điểm giữa là I. Một đường thẳng d chuyển động trong không gian sao cho khoảng cách từ A và B đến d luôn bằng nhau. Tìm quỹ tích hình chiếu của I lên d.

15. Hai điểm M, N lần lượt chuyển động trên các nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau, k là một số dương cho trước.

a) Giả sử M, N chuyển động thỏa mãn : $AM = kBN$. Tìm quỹ tích điểm giữa đoạn MN.

b) Giả sử M, N chuyển động thỏa mãn $AM = BN$. Tìm quỹ tích điểm I chia trong đoạn MN theo tỉ số k, ($MI/IN = k$).

16. $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ là hai hình bình hành nằm trên 2 mặt phẳng khác nhau, sao cho $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ là 4 đường thẳng đôi một chéo nhau. Các điểm A, B, C, D lần lượt chuyển động trên bốn đường thẳng đó, thỏa mãn

$$\frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \frac{C_1C}{CC_2} = \frac{D_1D}{DD_2}.$$

a) Chứng minh rằng ABCD là hình bình hành.

b) Tìm quỹ tích tâm hình bình hành đó.

17. Cho trên mặt phẳng α một đường tròn S tâm O bán kính R. Đoạn $AO = 2R$ vuông góc với α . M là một điểm chuyển động trên S ; mặt phẳng trung trực β của đoạn AM cắt α theo giao tuyến d. Gọi N là hình chiếu của A trên d.

a) Chứng minh rằng quỹ tích của N là một đường tròn S_1 và d luôn tiếp xúc với S_1 .

b) Gọi I là điểm giữa AM. Mặt phẳng γ đi qua A, vuông góc với IN cắt S_1 tại hai điểm B, C. Tính độ dài đoạn BC.

c) Mặt phẳng β chia hình chóp ABCN thành hai phần. Tính tỉ số thể tích 2 phần đó.

18. Cho tam giác SAB vuông tại S, $SA = a, SB = b$. Một điểm C chuyển động trên đường thẳng e vuông góc với mặt phẳng tam giác tại S. Gọi G, H là trọng tâm, trực tâm tam giác ABC và O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện SABC. Đặt $SC = c$.

a) Chứng minh rằng $SG = \frac{1}{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Tìm quỹ tích điểm G.

b) Chứng minh rằng 3 điểm S, G, O cùng nằm trên một đường thẳng theo thứ tự đó, và $SO = (3/2)SG$, từ đó hãy suy ra quỹ tích điểm O.

c) Chứng minh rằng $SH \perp (ABC)$ và

$$SH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Tìm quỹ tích điểm H.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng 3 điểm H, G, I cùng nằm trên một đường thẳng theo thứ tự đó, đồng thời $GH = 2GI$, và

$$SI = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 5a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

19. Hình chóp SABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B. $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh SA vuông góc với đáy và có độ dài $a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác vuông.

b) Tính số đo các nhị diện DC, DS của hình chóp. Tính góc và khoảng cách giữa 2 đường thẳng AD, SC.

c) Một điểm M chuyển động trong đoạn AB, α là mặt phẳng qua M, song song với mặt (SBC) cắt CD, DS, SA lần lượt tại N, P, Q. Xác định hình dạng tứ giác MNPQ. Đặt $AM = x$. Tính diện tích y của tứ giác này theo a và x. Vẽ đường biểu diễn của y theo sự biến thiên của x.

d) Tìm quỹ tích giao điểm I của 2 đường MQ và NP.

e) Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên mặt phẳng α .

f) Gọi E là điểm giữa đoạn MN, F là điểm giữa đoạn IE, tìm quỹ tích của E, F.

20. Cho trên mặt phẳng α hình chữ nhật ABCD có $AB = 10a$, $BC = 24a$. Một điểm S, chuyển động trên đường tròn (γ) đường kính BD của mặt phẳng β vuông góc với α theo giao tuyến BD. M là hình chiếu của S trên α . Đặt $x = BM$.

a) Tính thể tích hình chóp SABCD theo a và x.

b) Chứng minh rằng SAC là tam giác vuông.

c) Tìm quỹ tích hình chiếu H của A trên đường SD .

d) Tìm quỹ tích điểm giữa M của đoạn SC .

21. Lăng trụ đứng $ABC, A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác vuông, $AB = AC$. M là điểm giữa đoạn BC .

a) N là một điểm chuyển động trong đoạn AA_1 . Mặt phẳng α qua MN song song với AC cắt AB tại M_1 , và CC_1 tại N_1 . Tìm quỹ tích.

1) Giao điểm E của MN và M_1N_1 . 2) Giao điểm F của MN_1 và NM_1 . 3) Hình chiếu H của B_1 trên α . 4) Hình chiếu K của C trên α .

b) Gọi S là đường tròn đường kính AM nằm trong mặt phẳng (AA_1M) . Một điểm P chuyển động trên S , tìm quỹ tích giao điểm Q của BP với mặt phẳng (ACC_1A_1) .

22. Cho trong mặt phẳng P một đường tròn $(O ; R)$ và một điểm H ngoài đường tròn. Trên đường vuông góc tại H với P lấy một điểm S cố định. Điểm A chuyển động trên $(O ; R)$. Tìm quỹ tích hình chiếu K của H trên SA .

23. Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ cạnh bằng 1. Đoạn XY biến thiên, nhưng có độ dài không đổi d ($1 \leq d \leq 2$) luôn cắt AC' tại một điểm M cố định và có 2 đầu mút X, Y tương ứng tựa trên 2 mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Tìm quỹ tích điểm X .

24. Cho hình chóp lục giác đều $SABCDEF$, một điểm D' thay đổi trên đoạn SD . Mặt phẳng ABD' cắt SC, SE, SF tại C', E', F' .

a) Chứng minh rằng hình chóp $SABC'D'E'F'$ là một hình chóp ngoại tiếp. Tìm quỹ tích tâm hình cầu nội tiếp hình chóp đó.

b) Tìm quỹ tích giao điểm của 2 đường thẳng BC' và AF' .

25. Cho góc tam diện vuông $Oxyz$. A và B là 2 điểm cố định trên Ox và Oy và cách đều O , S chạy trên Oz . Tìm quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp trong tam giác SAB .

26. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ chung cạnh AB và thuộc hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Lấy 2 điểm M, N lần lượt trên 2 đường chéo AC và BF sao cho $AM = BN$. Tìm quỹ tích điểm giữa của MN .

27. Cho một hình hộp chữ nhật, tìm quỹ tích những điểm mà tổng các bình phương khoảng cách đến các mặt của hình hộp bằng a^2 , trong đó a là một độ dài cho trước.

28. Cho một mặt cầu $[O ; R]$ và một mặt nón đỉnh S ngoại tiếp mặt cầu. Gọi tâm của đường tròn tiếp xúc là C .

a) Tìm quỹ tích của C khi S chạy trên một mặt phẳng P cố định.

b) Tìm quỹ tích của C khi S chạy trên một mặt cầu khác cố định và qua O .

c) Tìm quỹ tích của C khi S chuyển động trên một đường tròn cố định tâm I , bán kính r , khi OI vuông góc với mặt phẳng của đường tròn.

29. Cho hai mặt cầu $[O ; R]$ và $[O' ; R']$ ($R < R'$) tiếp xúc trong với nhau. Điểm S chạy trên mặt cầu $[O']$ là đỉnh của một hình nón ngoại tiếp mặt cầu $[O]$ và tạo ra vòng tròn tiếp xúc tâm C .

a) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu nội tiếp trong hình nón đỉnh S với đáy là hình tròn (C) .

b) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón S nói trên.

30. Hai nửa đường thẳng Am , Bn vuông góc với nhau và nhận $AB = a$ làm đường vuông góc chung. Các điểm M , N lần lượt chuyển động trên Am , Bn sao cho ta luôn có $AM + BN = AB$.

a) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABMN$.

b) Chứng minh rằng tồn tại một mặt cầu S tiếp xúc với Am tại M , với Bn tại N và với đoạn AB tại một điểm O . Hãy xác định vị trí điểm O đó. Chỉ rõ cách dựng tâm I của mặt cầu S . Chứng minh rằng bán kính R của mặt cầu này có thể tính bởi công thức :

$$R = \sqrt{AM^2 + BN^2}.$$

c) Gọi I_1 , I_2 là hình chiếu của I trên các mặt phẳng $P = (B, Am)$, $Q = (A, Bn)$. Chứng minh rằng quỹ tích của I_1 , I_2 là các đoạn thẳng. Xác định các điểm đầu mút và độ dài các đoạn đó. Từ đó suy ra quỹ tích điểm I .

d) Chứng minh rằng góc $\widehat{MON}$ luôn giữ giá trị không đổi. Tính giá trị không đổi đó.

e) Gọi α là mặt phẳng vuông góc với AB tại điểm O . M_1 , N_1 là hình chiếu của M , N trên α và K là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN với α ($K \neq O$). Chứng minh rằng OK là phân giác của cả hai góc $\widehat{MON}$ và $\widehat{M_1ON_1}$.

f) Chứng minh rằng KMN là tam giác đều.

g) Chứng minh rằng điểm K nằm trên mặt phân giác của nhị diện (P, AB, Q) , đoạn OK giữ độ dài không đổi. Từ đó suy ra quỹ tích của điểm K .

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG III

1. Nửa đường thẳng song song với phân giác góc $\widehat{xOy}$.
2. a) Dùng định lý hàm số cosin cho 2 tam giác MAO và MIO. Chú ý $IO = \frac{1}{2}OA = \frac{R}{2}$.
b) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
3. Đoạn A_1A_2 nằm trên tia Oz lập với Ox một góc $\pi/3$; $OA_1 = 1, OA_2 = \sqrt{3}$.
4. a) Đoạn AB_1 và BA_1 . b) Nửa đường tròn đường kính AB.
d) O là tâm hình vuông ABB_1A_1 ; A_2, B_2 là điểm giữa OA, OB. Quỹ tích là đoạn A_2B_2 . e) NM là phân giác góc $\widehat{AMB}$ nên đi qua điểm O_1 đối xứng với O qua AB. Quỹ tích là cung $\widehat{H_1B}$ của đường tròn S đường kính A_1O_1 (H_1 là giao điểm của O_1A với S).
f) Nửa đường tròn đường kính O_1B .
5. a) Cung $\widehat{I_1I_2}$ của đường tròn S_1 , tâm O, bán kính a ; I_1, I_2 là giao điểm của S_1 với tia $Ox_1 \perp Ox, Oy_1 \perp Oy$. b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
c) Cung $\widehat{K_1K_2}$ của đường tròn S_2 tâm C, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; K_1, K_2 là giao điểm của S_2 với Ox_1, Oy_2 . d) $\frac{OH}{OK} = 2$.
6. Lấy điểm giữa K của AO ; $KI = KJ = \frac{R\sqrt{6}}{2}$.
7. Vẽ đường phân giác trong By và Cz của góc B và C tương ứng. Hạ $AP \perp By$ và $AQ \perp Cz$. Đường tròn đường kính PQ cắt By và Cz tại M_1 và M_2 (khác P và Q). Quỹ tích là cung $\widehat{M_1M_2}$.

10. Qua O kẻ đường thẳng $c \perp a$ và b tại H và K tương ứng. Gọi I, J là các điểm chia trong và ngoài đoạn HK theo tỉ số $1/2$. Quỹ tích là hình tròn đường kính IJ bỏ các điểm trên đường tròn ngoài hai điểm I, J.

11. Vẽ đường trung trực m_1 của AB cắt d tại J. Qua điểm giữa P của AJ vẽ đường thẳng $m_2 \parallel m_1$. Hạ $OH \perp d$. Gọi K là điểm giữa của OH. Đường thẳng JK cắt m_2 ở S. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua J ($Q \in d$). Quỹ tích phải tìm là đường thẳng QS.

12. Gọi P là điểm chia trong đoạn AD theo tỷ số $1/2$ và O là tâm hình vuông. Quỹ tích phải tìm là đoạn PO.

13. Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì $\widehat{zOz'} = \frac{\pi}{2}$.

14. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

15. b) Đường thẳng nối tâm của hai hình bình hành đã cho.

17. a) M, O, N thẳng hàng. $\Delta AMO \sim \Delta NMI \Rightarrow MN = \frac{5R}{2} \Rightarrow OM = \frac{3R}{2}$. b) BC tiếp xúc với S : $BC = R\sqrt{5}$. c) $\frac{1}{3}$.

18. a) Nửa đường thẳng song song với e, xuất phát từ trọng tâm của ΔSAB . b) Vị tự với quỹ tích của G theo tâm S, tỷ số $3/2$. c) CH cắt AB tại K ; K cố định ($SK \perp AB$). Quỹ tích là nửa đường tròn đường kính SK nằm trong mặt phẳng (K, C). d) I là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Dùng kết quả câu b).

19. b) $\widehat{CD} = \frac{\pi}{4}$, $\widehat{SD} = \frac{\pi}{3}$, $g(AD, SC) = \frac{\pi}{3}$,

$$d(AD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{3}; \text{ c) } y = \frac{1}{3}(4a - 3x)x\sqrt{3};$$

d) Lấy $O = AB \times CD$.

Đường thẳng qua A, // SB cắt OS tại I_1 . Quỹ tích là đoạn SI_1 (trừ điểm I_1). c) Lấy điểm giữa E_1 của BC, E_2 của AD. Quỹ tích của E là đoạn E_1E_2 . Quỹ tích của F là đoạn nối điểm F_1 của SE_1 với điểm giữa F_2 của I_1E_2 .

20. a) $V = 80a^2\sqrt{x(26-x)}$; c) Lấy hình chiếu A' của A trên BD. Quỹ tích B là đường kính $A'D$ trên mặt phẳng β ;

d) $\frac{\overline{CM}}{\overline{CS}} = \frac{1}{2}$.

21. a) 1) $\frac{\overline{MS}}{\overline{MN}} = \frac{1}{2}$.

2) Đoạn đối xứng với BB_1 qua B.

3) Cung của đường tròn đường kính B_1M_1 trên mặt phẳng ABB_1A_1 .

4) Dựng hình chữ nhật ACM_1M_2 . Quỹ tích là một cung của đường tròn đường kính CM_2 trên mặt phẳng (CC_1M_2) .

b) Đường tròn đường kính AC.

22. Gọi I là tâm mặt cầu qua S và đường tròn (O). Đường thẳng HO cắt đường tròn (O) tại B và C. Hạ HM_1 và HM_2 lần lượt vuông góc với SB và SC. Quỹ tích phải tìm là đường tròn đường kính M_1M_2 trong mặt phẳng vuông góc với (SBC).

30. a) Đoạn thẳng. c) Trong P dựng hình vuông ABCD ($D \in Am$). Trong Q dựng hình vuông ABEF. Quỹ tích của I_1 là đoạn AC, của I_2 là đoạn BF, của I là đoạn CF. d) $\widehat{MON} = 2\pi/3$.

e) MN và $M'N'$ cắt nhau tại K. O, K', K thẳng hàng, và

$$\frac{OM}{ON} = \frac{K'M}{K'N} = \frac{K'M_1}{K'N_1} = \frac{OM_1}{ON_1}.$$

f) Dùng kết quả d) và e).

g) $OK = a\sqrt{2}$. Quỹ tích của K là một đoạn thẳng.

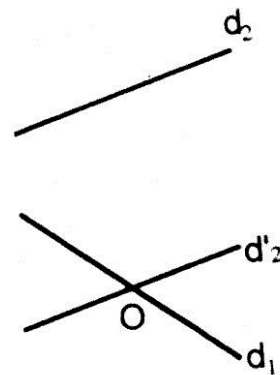
CHƯƠNG IV

BÀI TOÁN CỰC TRỊ

§1. Góc, khoảng cách và đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

1. Góc

Để tính giá trị của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 ; cần chọn được một điểm O trên một trong hai đường thẳng, đường d_1 chẳng hạn, xác định đường thẳng d'_2 đi qua O và song song với d_2 . Góc giữa d_1 và d_2 chính là góc giữa d_1 và d'_2 (hình 85). Như vậy, góc giữa hai đường thẳng chéo nhau cần được tính qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau. Góc giữa hai đường thẳng cắt nhau được tính bằng cách: đưa góc này vào trong một tam giác nào đó và dùng một hệ thức lượng trong tam giác này.



$$g(d_1, d_2) = g(d_1, d'_2) \leq \pi/2$$

Hình 85

Cần chú ý hai điều sau :

- a) Góc giữa hai đường thẳng không bao giờ vượt quá $\pi/2$.
- b) Hai hệ thức lượng thường dùng trong tam giác là :

Nếu ΔABC nội tiếp trong đường tròn bán kính R , thì ta luôn

$$\text{có : } \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R \text{ (định lý hàm số sin).}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A,$$

$$\text{hay } \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \quad (\text{định lý hàm cosin}).$$

Vì dụ 1. M, N, P là điểm giữa các cạnh AB, BC, C_1D_1 của hình lập phương $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Xác định góc giữa các cặp đường thẳng (MN, C_1D_1) ; (BD, AD_1) ; (MN, AP) ; (A_1P, DN) .

Giải: (MN, C_1D_1) :

Đường thẳng qua M song song với C_1D_1 chính là AB. Do đó (1):

$$\begin{aligned} g(MN, C_1D_1) &= g(MN, AB) = \\ &= \widehat{BMN}. \end{aligned}$$

Dễ thấy $\triangle BMN$ vuông cân, do đó

$$\widehat{BMN} = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow g(MN, C_1D_1) = \frac{\pi}{4} \quad (\text{hình 86}).$$

* (BD, AD_1) : Đường thẳng qua B song song với AD_1 chính là BC_1 . Do đó $g(BD, AD_1) = g(BD, BC_1) = \widehat{DBC_1}$.

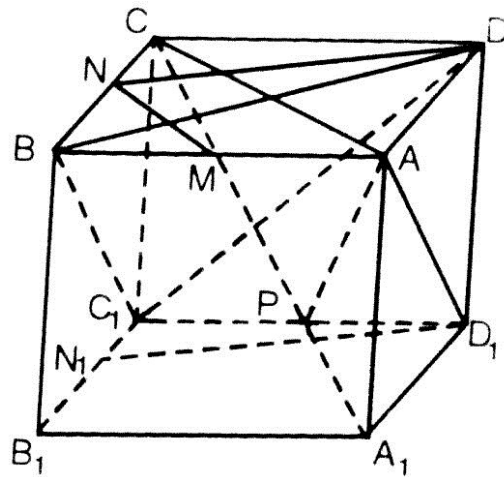
Dễ thấy rằng $\triangle DBC_1$ là tam giác đều, nên $\widehat{DBC_1} = \pi/3$. Vậy $g(BD, AD_1) = \pi/3$ (hình 86).

* (MN, AP) : Đường thẳng qua A song song với MN chính là AC.

$$\text{Do đó } g(MN, AP) = g(AC, AP) = \widehat{CAP}.$$

Để tính giá trị của góc này, ta tính các cạnh của $\triangle CAP$ thông qua độ dài cạnh của hình lập phương (giả sử bằng a) và dùng định lý hàm số cosin cho tam giác đó. Ta có:

$$AC = a\sqrt{2}$$



Hình 86

(1) Ký hiệu $g(a, b)$ dùng để chỉ giá trị góc giữa hai đường thẳng a, b.

$$CP_2 = CC_1^2 + C_1P^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4},$$

$$\begin{aligned} AP^2 &= AA_1^2 + A_1P^2 = AA_1^2 + A_1D_1^2 + D_1P^2 = \\ &= a^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{4}. \end{aligned}$$

Theo định lý hàm số cosin ta có :

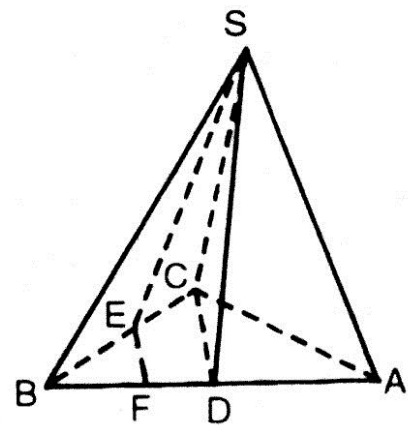
$$\begin{aligned} \cos \widehat{CAP} &= \frac{AC^2 + AP^2 - CP^2}{2 \cdot AC \cdot AP} = \\ &= \frac{2a^2 + \frac{9a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAP} = \frac{\pi}{4}. \text{ Vậy } g(MN, AP) = \frac{\pi}{4} \text{ (hình 86).}$$

* (A_1P, DN) : Gọi N_1 là điểm giữa B_1C_1 , dễ thấy $D_1N_1 \parallel DN$, do đó $g(A_1P, DN) = g(A_1P, D_1N_1)$. Trong hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, ta có : $A_1P \perp D_1N_1$. Do đó : $g(A_1P, DN) = \pi/2$ (hình 86).

Ví dụ 2. Hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Cạnh $SC = 1$, và vuông góc với đáy. D, E là điểm giữa AB, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng CD và SE .

Giải : Lấy F là điểm giữa BD thì $EF = (1/2)CD$. Do đó để tính góc giữa CD và SE , ta tính góc $\widehat{SEF}$ bằng cách tính 3 cạnh của



Hình 87

$\triangle SEF$ và dùng định lý hàm số cosin cho tam giác này. Ta có :

$$EF = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} \left(AB \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Trong tam giác vuông SCE :

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3.$$

Trong tam giác vuông SCF :

$$\begin{aligned} SE^2 &= SC^2 + CF^2 = SC^2 + CD^2 + DF^2 = \\ &= 1^2 + (\sqrt{6})^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Do đó theo định lý hàm số cosin ta có :

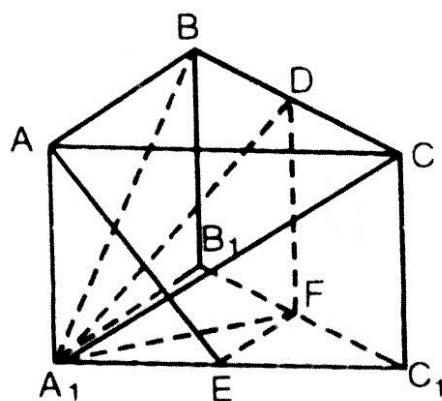
$$\cos \widehat{SEF} = \frac{SE^2 + EF^2 - SF^2}{2SE \cdot EF} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SEF} = \frac{3\pi}{4}.$$

Góc $\widehat{SEF}$ vượt quá $\pi/2$ nên góc giữa CD và SE sẽ bù với góc này, tức là $g(CD, SE) = \pi - \widehat{SEF} = \pi/4$.

Chú ý : Nếu góc cần tính không nhận các giá trị đặc biệt, thì sẽ coi như tính được nếu đã biết giá trị của một trong các hàm lượng giác của góc đó.

Ví dụ 3. Lăng trụ tam giác $ABCA_1B_1C_1$ có các mặt bên là hình vuông cạnh a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng (A_1B, B_1C_1) , (DE, A_1F) . Trong đó D, E, F là điểm giữa các đoạn BC, A_1C_1 , C_1B_1 .

Giải : a) (A_1B, B_1C_1) : Dễ thấy đáy là lăng trụ đều. Đường thẳng qua B song song với B_1C_1 là BC nên góc cần tính sẽ là $\widehat{A_1BC}$. $\triangle A_1BC$ là tam giác cân có cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$, nên :



Hình 88

$$\cos \widehat{A_1BC} = \frac{BD}{BA_1} = \frac{\frac{1}{2}a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Vậy } g(A_1B, B_1C_1) = \arccos \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \quad (1).$$

b) (DE, A_1F) : Đường thẳng qua D, song song với A_1F là DA nên góc cần tính sẽ là $\widehat{EDA}$, tính được nhờ định lý hàm số cosin trong tam giác EDA. Ta có : ΔABC đều nên $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Trong tam giác vuông } AA_1E : AE^2 = AA_1^2 + A_1E^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } DEF : DE^2 = DF^2 + FE^2 = \frac{5a^2}{4}.$$

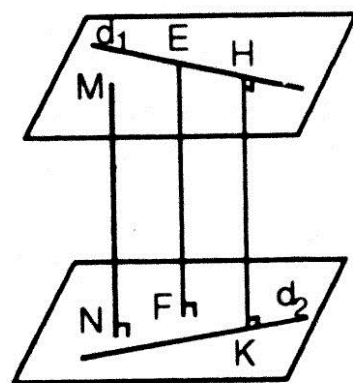
$$\text{Do đó : } \Delta EDA \text{ cân, và } \cos \widehat{EDA} = \frac{\frac{1}{2}AD}{ED} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

$$\text{Vậy } g(DE, A_1F) = \arccos \left(\frac{\sqrt{15}}{10} \right) \text{ (hình 88).}$$

2. *Khoảng cách.* Khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau có thể tính bằng ba cách sau : (hình 89).

a) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa d_1, d_2 .

b) Khoảng cách từ một điểm tùy ý trên d_1 đến mặt phẳng qua d_2 song song với d_1 .



Hình 89

(1) $\arccos$ là ký hiệu góc không vượt quá π có cosin bằng a . Tương tự, ta cũng có các ký hiệu $\arcsin$, $\arctg$, $\text{arccot}g$.

c) Độ dài đường vuông góc chung HK của d_1 và d_2 .

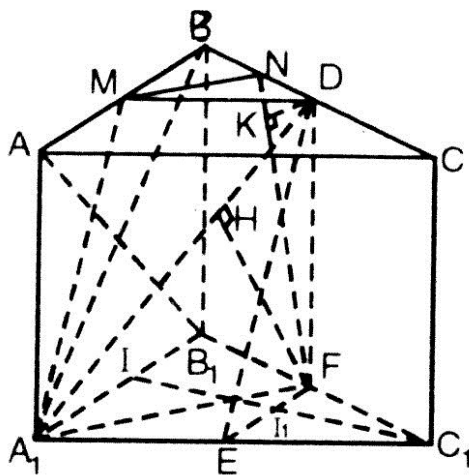
Ví dụ 4. Với giả thiết của ví dụ 3, tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng (DE, AB_1) , (A_1B, B_1C_1) , (DE, A_1F) .

Giải : (hình 90).

a) (DE, AB_1) : Ta có :

$DF \parallel BB_1$ và $EF \parallel A_1B_1$
nên $(DEF) \parallel (ABB_1A_1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng DE, AB_1 chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (DEF) và (ABB_1A_1) . Gọi I là điểm giữa A_1B_1 . Để thấy C_1I vuông góc với hai mặt phẳng (ABB_1A_1) , (DEF) và cắt chúng lần lượt tại I, I_1 ($C_1I_1 = I_1I$).



Hình 90.

Bởi vậy, khoảng cách giữa hai mặt phẳng này là :

$$H_1 = \frac{1}{2} C_1I = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } ^{(1)} d(DE, AB_1) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

b) (A_1B, B_1C_1) : Do $BC \parallel B_1C_1$ nên $(A_1BC) \parallel B_1C_1$, vậy (A_1BC) là mặt phẳng qua A_1B và song song với B_1C_1 . Do đó khoảng cách cần tính sẽ là khoảng cách từ một điểm trên B_1C_1 đến mặt phẳng này. Ta chọn đó là điểm F . Kẻ đường cao HF của ΔA_1FD , ta có (hình 90) :

$$\left. \begin{array}{l} FD \perp BC \\ A_1D \perp BC \end{array} \right\} \Leftrightarrow (A_1CD) \perp BC \Rightarrow FH \perp BC,$$

(1) Ký hiệu $d(a, b)$ dùng để chỉ khoảng cách giữa hai đường thẳng a, b .

mà $FH \perp A_1D \Rightarrow FH \perp (A_1BC)$. Vậy FH là khoảng cách từ F đến mặt phẳng (A_1BC) . Trong tam giác vuông A_1FD :

$$FH \cdot A_1D = A_1F \cdot FD = 2s(A_1FD).$$

$$\text{Từ đó } FH = \frac{A_1F \cdot FD}{A_1D} = \frac{A_1F \cdot FD}{\sqrt{A_1F^2 + FD^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

$$\text{Vậy } d(A_1B, B_1C_1) = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

c) (DE, A_1F) : Gọi M là điểm giữa AB , ta có

$$MD \parallel \frac{1}{2} AC \parallel \frac{1}{2} A_1C_1 \Rightarrow MD \parallel A_1E \Rightarrow A_1M \parallel DE.$$

Vậy (A_1FM) là mặt phẳng qua A_1F và song song với DE . Mặt phẳng (A_1FM) cắt đáy (ABC) theo giao tuyến MN ($N \in BC$). Do $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, nên $MN \parallel A_1F \Rightarrow MN \parallel AD \Rightarrow N$ là điểm giữa đoạn BD . Khoảng cách giữa DE và A_1F bằng khoảng cách từ D đến mặt phẳng (A_1FMN) . Hạ đường cao DK của tam giác vuông DFN ta có : $DK \perp NF$. Mặt khác, do $A_1F \perp (BCC_1B_1)$ nên $A_1F \perp DK$.

Suy ra $DK \perp (A_1FNM)$.

Do đó, độ dài cần tính là DK . Trong tam giác vuông DFN :

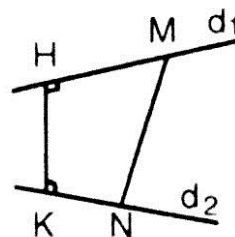
$$DK = \frac{DF \cdot DN}{FN} = \frac{a \cdot \frac{a}{4}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a^2}{4}\right)}} = \frac{a\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Vậy } d(DE, A_1F) = \frac{a\sqrt{17}}{17}.$$

3. *Đường vuông góc chung.* Cho trước hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 . Sẽ tồn tại đúng một cặp điểm H, K : $H \in d_1, K \in d_2$ sao cho đường HK vuông góc với cả d_1 và d_2 . (Hình 91).

HK được gọi là đường vuông góc chung của d_1, d_2 và độ dài đoạn HK là khoảng cách giữa hai đường đó.

Chú ý rằng với mọi cặp điểm $M \in d_1, N \in d_2$ ta luôn có $HK \leq MN$. Dấu "=" có và chỉ có khi $M \equiv H$ và $N \equiv K$.

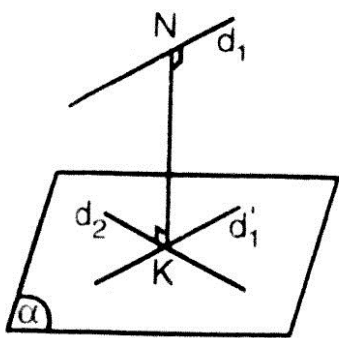


Hình 91

Có thể dựng đường vuông góc chung của d_1, d_2 bằng các phương pháp sau đây :

a) Dựng mặt phẳng α qua d_2 và song song d_1 .

Xác định hình chiếu vuông góc d_1' của d_1 trên α . Lấy giao điểm K của d_1' và d_2 . Đường thẳng qua K, vuông góc với α , cắt d_1 tại H. HK là đường vuông góc chung cần dựng (hình 92).



Hình 92

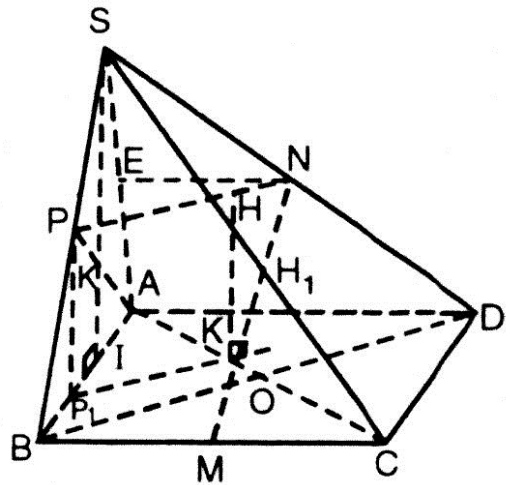
Ví dụ 5. Hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều nằm trên mặt phẳng vuông góc với đáy, M, N, P là điểm giữa các cạnh BC, SD, SB. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng (NP, AC), (MN, AP).

Giải : a) (NP, AC) :

NP là đường trung bình của ΔSBD nên $NP \parallel BD \Rightarrow NP \parallel (ABCD)$. Vậy (ABCD) là mặt phẳng chứa AC và song song với NP. Hình 93.

Gọi I là điểm giữa AB. Do SAB là tam giác đều nên $SI \perp AB$. do $(SAB) \perp (ABCD)$, nên từ đó suy ra $SI \perp (ABCD)$. Bởi vậy

hình chiếu P_1 của P trên mặt phẳng (ABCD) sẽ là điểm giữa đoạn BI , và hình chiếu của PN trên đáy sẽ là đường thẳng qua P_1 , song song với PN , tức là song song với BD . Đường này cắt AC tại K . Đường thẳng qua K song song với PP_1 cắt PN tại H . KH là đường vuông góc chung cần dựng. Theo cách dựng, ta có $PHKP_1$ là hình chữ nhật nên



Hình 93

$$HK = PP_1 = \left(\frac{1}{2}\right)SI = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy} \quad d(NP, AC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi O là giao điểm của AC và BD , ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AK}{AC} &= \frac{AK}{2AO} = \frac{1}{2} \frac{AP_1}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\ \Rightarrow \frac{AK}{KC} &= \frac{AK}{AC - AK} = \frac{3}{8 - 3} = \frac{3}{5} \\ PH &= P_1K = \frac{AP_1}{AB} \cdot BO = \frac{3}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{8} \\ \Rightarrow HN &= PN - PH = \frac{a\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \frac{PH}{HN} = 3. \end{aligned}$$

Vậy H là điểm chia đoạn PN theo tỷ số $3/1$,

K là điểm chia đoạn AC theo tỷ số $3/5$.

Biết các tỷ lệ này có thể dựng ngay được HK .

b) (MN, AP) :

Gọi E là điểm giữa SA . Trong $\triangle SAD$ ta có $NE \parallel \frac{1}{2} AD$

//
 $\Rightarrow NE = MB \Rightarrow MN \parallel BE \Rightarrow MN \parallel (SAB)$. Vậy (SAB) là mặt phẳng chứa AP và song song với MN (hình 93). Mặt khác, do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $CB \perp BA$, nên ta suy ra $CB \perp (SAB)$. Bởi thế BE chính là hình chiếu của MN trên mặt phẳng (SAB) . Hình chiếu BE cắt AP tại điểm K_1 . Dễ thấy K_1 là trọng tâm của tam giác SAB . Đường thẳng qua K_1 song song với BM sẽ cắt MN tại H_1 . H_1K_1 là đường vuông góc chung cần dựng.

Theo cách dựng ta có : $H_1K_1 = MB = \frac{a}{2} = d(MN, AP)$.

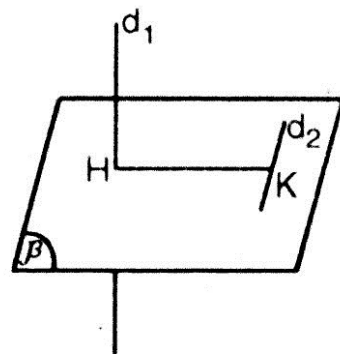
Do K_1 là tâm của tam giác đều SAB nên :

$$\frac{K_1A}{K_1P} = 2 \Rightarrow K_1 \text{ là điểm chia đoạn } AP \text{ theo tỷ số } 2/1.$$

$$\frac{H_1M}{H_1N} = \frac{K_1B}{K_1E} = 2 \Rightarrow H_1 \text{ chia đoạn } MN \text{ theo tỷ số } 2/1.$$

b) Nếu biết $d_1 \perp d_2$ thì có thể dựng HK như sau : qua d_2 dựng mặt phẳng $\beta \perp d_1$ tại H ; xác định hình chiếu K của H trên d_2 . HK là đường vuông góc chung cần dựng (hình 94).

Ví dụ 6. Hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy. M là điểm giữa đoạn AB . Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng (BD, SC) , (BC, SM) .

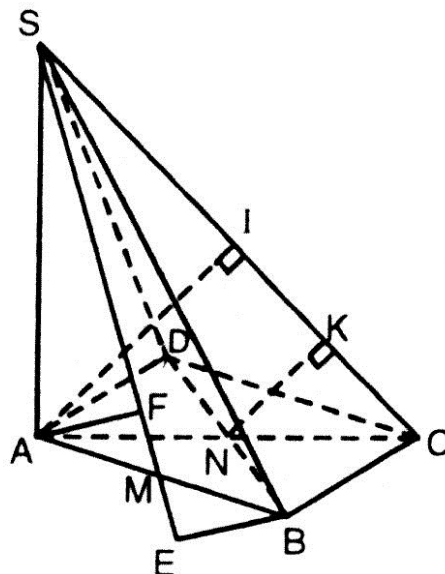


Hình 94

Giải : a) (BD, SC) : Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.

Do đáy là hình vuông nên $AC \perp BD$. Từ đó suy ra $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ (hình 95).

Gọi H là giao điểm của BD và AC. Mặt phẳng (SAC) $\perp$ BD cắt đường thẳng này tại H, dựng HK $\perp$ SC (K $\in$ SC), HK chính là đường vuông góc chung của BD và SC. Đường này song song với đường cao AI của tam giác SAC. Do SA = AC = $a\sqrt{2}$, nên I là điểm giữa đoạn SC. Do H là điểm giữa AC nên HK là đường trung bình của tam giác vuông cân AIC.



Hình 95

$$\text{Vậy : } HK = \frac{1}{2} AI = \frac{1}{4} SC = \frac{a}{2} = d(BD, SC).$$

$$H \text{ là điểm giữa } AC, \text{ và dễ thấy } \frac{KS}{KC} = 3.$$

b) (BC, SM) : Do SA $\perp$ (ABCD) nên SA $\perp$ BC. Mặt khác, BC $\perp$ AB, suy ra BC $\perp$ (SAB) (hình 95).

Mặt phẳng (SAB) chứa SM, vuông góc với BC và cắt BC tại B. Nên nếu kẻ BE $\perp$ SM (E $\in$ SM), thì BE chính là đường vuông góc chung giữa BC và SM. Kẻ đường cao AF của tam giác vuông ASM. Do M là điểm giữa của AB nên ta có :

$$\text{//}$$

$$BE = AF, \text{ do đó :}$$

$$BE = AF = \frac{SA \cdot AM}{SM} = \frac{a\sqrt{2}}{3} = d(BC, SM),$$

$$\text{và : } \frac{EM}{MS} = \frac{FM}{MS} \cdot \frac{AM^2}{MS^2} = \frac{1}{9},$$

$$\text{nên } \frac{EM}{ES} = \frac{EM}{MS + EM} = \frac{1}{9 + 1} = \frac{1}{10}$$

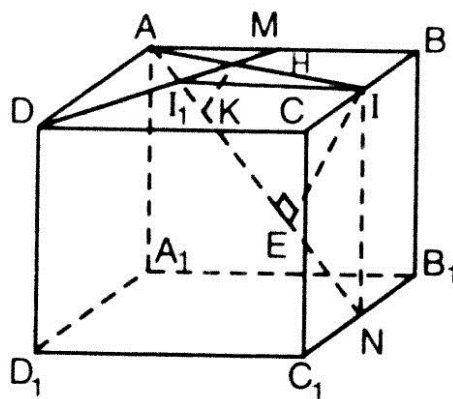
Vậy E là điểm chia ngoài đoạn MS theo tỷ số 1/10.

Ví dụ 7. M, N là điểm giữa các cạnh AB, B_1C_1 của hình lập phương $ABCD A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường (AN, DM).

Giải : Gọi I là điểm giữa của BC (hình 96). Do ABCD là hình vuông nên $DM \perp AI$. Mặt khác, do $NI \perp (ABCD)$ nên $NI \perp DM$.

Suy ra $DM \perp (ANI)$.

Gọi H là giao điểm của DM và AI. Mặt phẳng (AIN) chứa AN và vuông góc với DM tại H.



Hình 96

Kẻ $HK \perp AN$ ($K \in AN$), khi đó HK là đường vuông góc chung cần tìm. Đường này song song với đường cao IE của tam giác vuông NIA.

Ta có : $\frac{HD}{HM} = \frac{AD^2}{AM^2} = 4$; vậy H là điểm chia đoạn DM theo tỷ số 4/1.

Gọi I_1 là điểm giữa đoạn DM, ta có (hình 96) :

$$\frac{HA}{HI} = \frac{AM}{II_1} = \frac{AM}{\frac{1}{2}(MB + CD)} = \frac{2}{3},$$

Suy ra
$$\frac{HK}{IE} = \frac{AK}{AE} = \frac{AH}{AI} = \frac{AH}{HI + AH} = \frac{2}{3 + 2} = \frac{2}{5}.$$

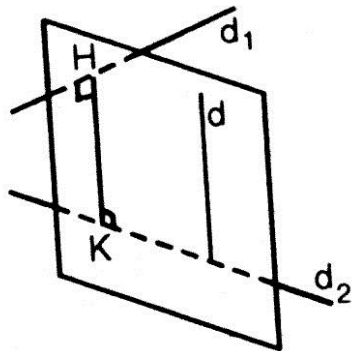
Vậy :
$$HK = \frac{2}{5} IE = \frac{2}{5} \frac{IN \cdot AI}{AN} = \frac{2a\sqrt{5}}{15} = d(AN, DM),$$

và
$$AK = \frac{2}{5} AE = \frac{2}{5} \frac{AI^2}{AN} = \frac{a}{3},$$

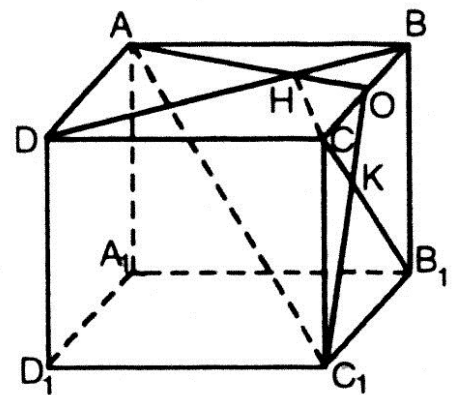
hay
$$\frac{AK}{KN} = \frac{AK}{AN - AK} = \frac{2}{7},$$

K là điểm chia đoạn AN theo tỷ số $\frac{2}{7}$.

c) Nếu tìm được một đường thẳng d vuông góc với cả d_1 , d_2 thì $d \parallel HK$. Dựa vào mặt phẳng (HK, d) để xác định vị trí H, K. Từ đó tính được độ dài đoạn KH. (Hình 97).



Hình 97



Hình 98

Ví dụ 8. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường BD, CB_1 trong hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh bằng a.

Giải : (hình 98). Xét đường AC_1 . Hình chiếu của AC_1 trên mặt ABCD là $AC \perp BD$. Theo định lý ba đường vuông góc ta có $AC_1 \perp BD$.

Tương tự ta chứng minh được $AC_1 \perp CB_1$. Do đó đường vuông góc chung HK của hai đường BD, CB_1 sẽ song song với AC_1 . Vậy bốn điểm A_1 , C_1 , H, K cùng nằm trong một mặt phẳng.

Suy ra hai đường AH và C_1K sẽ phải cắt nhau tại O trên giao tuyến BC của hai mặt phẳng (ABCD) và (BCC_1B_1) .

Để xác định vị trí của H, K trước tiên ta xác định điểm O.

$$\text{Do } HK \parallel AC_1 \text{ nên } \frac{HO}{HA} = \frac{KO}{KC_1}.$$

$$\text{Mặt khác } \frac{HO}{HA} = \frac{BO}{DA}, \frac{KO}{KC_1} = \frac{CO}{B_1C_1} \text{ nên}$$

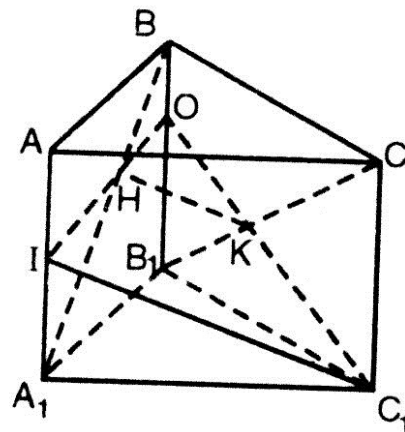
$$\frac{BO}{DA} = \frac{CO}{B_1C_1} \Rightarrow BO = CO.$$

Vậy O là điểm giữa đoạn BC. Do đó dễ dàng tính được :

$$\frac{HB}{HD} = \frac{KC}{KB_1} = \frac{1}{2}, \quad HK = \frac{1}{3} AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3} = d(BD, CB_1).$$

Ví dụ 9. Lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có 9 cạnh đều bằng a. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường A_1B và B_1C .

Giải : Gọi I là điểm giữa đoạn AA_1 (hình 99). Dùng phương pháp như ví dụ 7, bạn học hãy tự chứng minh rằng $C_1I \perp A_1B$, $C_1I \perp B_1C$. Do đó đường vuông góc chung HK của A_1B và B_1C sẽ song song với C_1I . Suy ra IH và C_1K sẽ cắt nhau tại một điểm O trên BB_1 . Trước tiên hãy xác định điểm O, bằng cách xác định giá trị $HO = OB$. Do $HK \parallel IC_1$ nên :



Hình 99

$$\frac{HO}{HI} = \frac{KO}{KC_1} \text{ mà } \frac{HO}{HI} = \frac{OB}{A_1I} = \frac{2x}{a},$$

$$\frac{KO}{KC_1} = \frac{B_1O}{CC_1} = \frac{a-x}{a}, \text{ do đó : } \frac{2x}{a} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

Thay vào đẳng thức trên sẽ được :

$$\frac{HA_1}{HB} = \frac{IA_1}{OB} = \frac{3}{2}; \quad \frac{KB_1}{KC} = \frac{OB_1}{CC_1} = \frac{2}{3}.$$

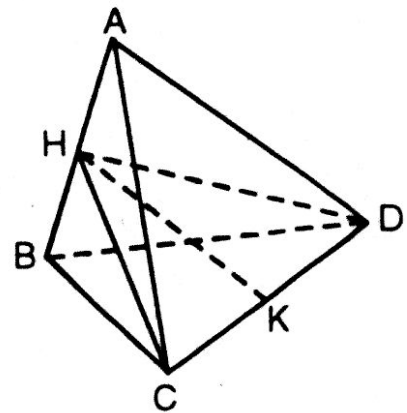
Vậy H là điểm chia đoạn A_1B theo tỷ số $\frac{3}{2}$,

K là điểm chia đoạn B_1C theo tỷ số $\frac{1}{3}$,

và
$$HK = \frac{OH}{OI} \cdot C_1I = \frac{2}{5} C_1I = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(A_1B, B_1C).$$

d) *Áp dụng kết quả* : Nếu tứ diện ABCD có $AC = BD$, $AD = BC$, thì đường vuông góc chung của hai đường AB, CD sẽ là đường nối các điểm giữa H, K của hai đoạn đó (hình 100).

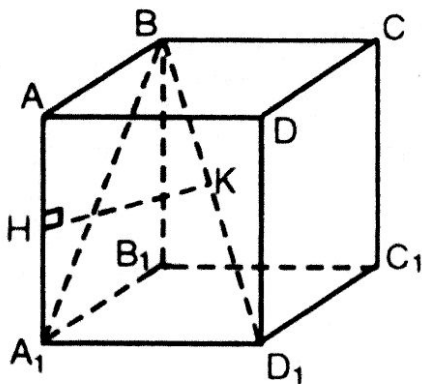
Chứng minh : Do $AC = BD$, $BC = AD$, cạnh AB chung nên $\triangle ABC = \triangle ABD$.



Hình 100

Do đó hai trung tuyến tương ứng của chúng phải bằng nhau, tức là $CH = DH$. Vậy CDH là tam giác cân, do đó $HK \perp CD$. Tương tự ta chứng minh được $\triangle KAB$ cân và $HK \perp AB$.

Ví dụ 10. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh a. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường AA_1 và BD_1 .



Hình 101

Giải : Xét tứ diện AA_1BD_1 ta có (hình 101) :

$$AB = A_1D_1 = a, AD_1 = A_1B = a\sqrt{2}$$

Do đó đường vuông góc chung của AA_1 và BD_1 là đường nối các điểm giữa H, K của hai đoạn AA_1 và BD_1 .

$$\text{Để tính được } HK = \frac{a\sqrt{2}}{2} = d(AA_1 ; BD_1).$$

§2. Hệ thức liên hệ

Nếu trong giả thiết của bài toán có hai yếu tố (điểm, đường thẳng, góc...) chuyển động, chịu một điều kiện ràng buộc hình học nào đó thì một câu hỏi thường gặp là cần chuyển điều kiện ràng buộc hình học đó thành một điều kiện ràng buộc giữa các đại lượng có thể tính toán được dưới dạng một đẳng thức đại số, thường được gọi là một hệ thức liên hệ.

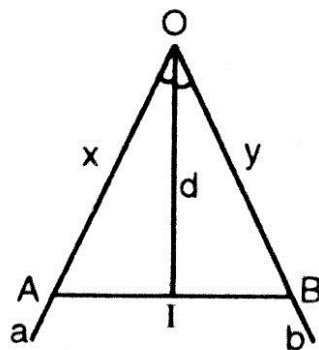
Các phương pháp hay dùng để giải bài toán này là :

1. Chọn và tính một đại lượng hình học nào đó (độ dài đoạn thẳng, diện tích một đa giác, thể tích một đa diện...) theo hai cách khác nhau, đẳng thức liên hệ giữa hai cách tính đó sẽ cho hệ thức cần tìm.

Ví dụ 1. I là một điểm cố định trên phân giác của góc $\widehat{aOb}$. Các điểm A, B lần lượt chuyển động trên Oa, Ob sao cho đường thẳng AB luôn đi qua I. Tìm hệ thức liên hệ giữa hai độ dài $OA = x$ và $OB = y$.

Giải : Đặt $\widehat{aOb} = \alpha$, $OI = d$; α và d sẽ là hai đại lượng cố định. Hệ thức liên hệ giữa x và y được tìm bằng cách tính diện tích $\triangle OAB$ theo hai cách :

Cách 1. (Hình 102) Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có :



Hình 102

$$S(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} yx \sin \alpha. \quad (1)$$

Cách 2. Do AB luôn đi qua I nên :

$$\begin{aligned} S(OAB) &= S(OAI) + S(OBI) = \\ &= \frac{1}{2} dx \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} dy \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} d \sin \frac{\alpha}{2} (x + y). \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\frac{1}{2} xy \sin \alpha = \frac{1}{2} d \sin \frac{\alpha}{2} (x + y) \Rightarrow 2xy \cos \frac{\alpha}{2} = d(x + y).$$

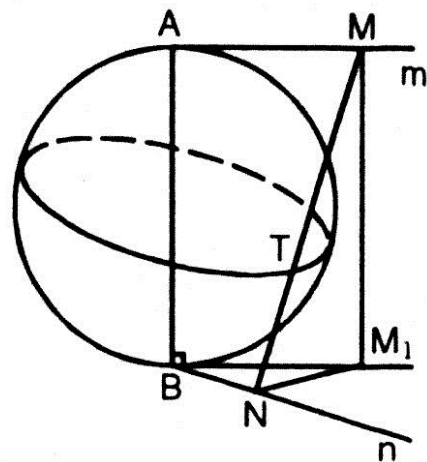
Đây chính là hệ thức liên hệ cần tìm. Nó có thể viết lại dưới dạng :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2 \cos \frac{\alpha}{2}}{d}.$$

Chú ý. Trong hai cách tính đại lượng đã chọn, thường sẽ có một cách là cách tính thông thường, dùng cho mọi trường hợp (như cách 1 của ví dụ 1), cách còn lại sẽ chỉ có được do điều kiện ràng buộc hình học của đầu bài (như cách 2 của ví dụ 1).

Ví dụ 2. Hai nửa đường thẳng Am, Bn chéo nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên Am, Bn, sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB. Tìm hệ thức liên hệ giữa $x = AM$ và $y = BN$.

Giải : Ta tìm hệ thức liên hệ giữa x, y bằng cách tính độ dài đoạn MN theo hai cách :



Hình 103

Cách 1 (cách thông thường). Gọi góc giữa Am, Bn là α ; α không đổi. Kẻ $MM_1 \parallel AB$. Ta có ABM_1M là hình chữ nhật, do đó

$BM_1 = AM = x$ và $M_1BN = \alpha$ (hình 103). Do AB là đường vuông góc chung của Am, Bn, nên $AB \perp BN$ và $AB \perp BM_1$. Vậy $AB \perp (BNM_1)$. Mà $MM_1 \parallel AB$, nên $MM_1 \perp (BNM_1)$, suy ra tam giác MM_1N vuông tại M_1 (hình 103). Bởi vậy

$$MN^2 = MM_1^2 + M_1N^2. \quad (1)$$

Trong tam giác BM_1N , theo định lý hàm số cosin ta có :

$$\begin{aligned} M_1N^2 &= BM_1^2 + BN^2 - 2BM_1 \cdot BN \cos \widehat{M_1BN} = \\ &= x^2 + y^2 - 2xycos\alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) sẽ được :

$$MN^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2xycos\alpha. \quad (3)$$

Cách 2. Gọi tiếp điểm giữa MN và mặt cầu đường kính AB là T. Do AB là đường vuông góc chung của Am và Bn nên hai đường Am, Bn tiếp xúc với mặt cầu đang xét tại A và B. MA, MT là hai tiếp tuyến cùng xuất phát từ M đến một mặt cầu nên chúng bằng nhau, tức là $MT = MA = x$.

Tương tự $NT = NB = y$.

$$\text{Do đó } MN = MT + NT = x + y. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$$(x + y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2xycos\alpha$$

$$\text{hay } xy = \frac{a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ đây là hệ thức liên hệ cần tìm.}$$

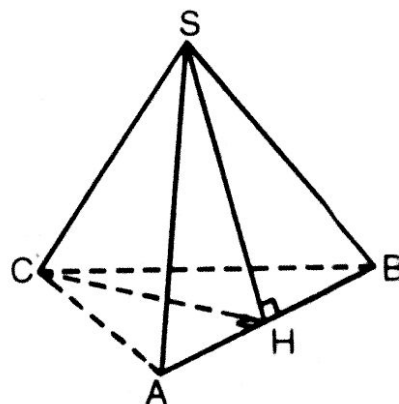
Ví dụ 3. Tứ diện SABC có góc tam diện tại đỉnh S là tam diện vuông. Đặt $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ và ba góc của ΔABC lần lượt là A, B, C. Chứng minh hệ thức :

$$a^2 \operatorname{tg} A = b^2 \operatorname{tg} B = c^2 \operatorname{tg} C.$$

Giải : Kẻ đường cao CH của tam giác ABC. Do SABC là góc tam diện vuông nên $CS \perp (SAB)$, do đó theo định lý ba đường vuông góc ta có $SH \perp AB$ (hình 104).

Hệ thức trên được chứng minh bằng cách dùng công thức tính diện tích ΔABC và tính đường cao CH theo hai cách :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } CH &= AH \cdot \operatorname{tg} A = \\ &= BH \cdot \operatorname{tg} B \text{ và } s(ABC) = \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AB \cdot (AH \operatorname{tg} A) = \end{aligned}$$



Hình 104

$$= \frac{1}{2} (AB \cdot AH) \operatorname{tg} A = \frac{1}{2} SA^2 \cdot \operatorname{tg} A = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} A.$$

Đẳng thức $AB \cdot AH = SA^2$ có được do SH là đường cao của tam giác vuông SAB . Tương tự ta có :

$$s(ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AB \cdot BH \cdot \operatorname{tg} B = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{tg} B. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a^2 \operatorname{tg} A = b^2 \operatorname{tg} B = 2s(ABC)$.

Tương tự bằng cách thay đổi vai trò của B và C ta chứng minh được : $a^2 \operatorname{tg} A = b^2 \operatorname{tg} B = c^2 \operatorname{tg} C$.

2. Chuyển điều kiện ràng buộc đã cho thành điều kiện ràng buộc về dạng của một tam giác, hệ thức liên hệ sẽ là một hệ thức lượng của tam giác này.

Ví dụ 4. ABC là tam giác vuông có $AB = AC = a$. Các đường thẳng Am , Bn cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và ở cùng một phía đối với mặt phẳng này. Các điểm D , E lần lượt chuyển động trên Am , Bn sao cho ΔCDE luôn vuông góc tại E . Tìm hệ thức liên hệ giữa $x = AD$ và $y = BE$.

Giải : (hình 105). Theo giả thiết ΔABC là tam giác vuông. Do $AB = AC$, nên ΔABC phải vuông ở A và $BC = a\sqrt{2}$. Để ΔCED vuông tại E điều kiện cần và đủ là :

$$CD^2 = CE^2 + ED^2. \quad (1)$$

Trong tam giác vuông BCE :

$$CE^2 = CB^2 + BE^2 = 2a^2 + y^2. \quad (2)$$

Trong tam giác vuông ACD :

$$CD^2 = CA^2 + AD^2 = a^2 + x^2. \quad (3)$$

Kẻ $EF \parallel BA$ ($F \in Am$) ; trong tam giác vuông FED , ta có :

$$DE^2 = DF^2 + FE^2 = |DA - FA|^2 + AB^2 = (x - y)^2 + a^2. \quad (4)$$

Thay (2), (3), (4) vào (1) ta được hệ thức :

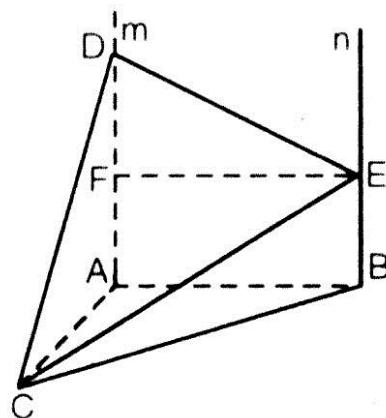
$$a^2 + x^2 = 2a^2 + y^2 + (x - y)^2 + a^2.$$

Vậy hệ thức cần tìm là : $y(x - y) = a^2$.

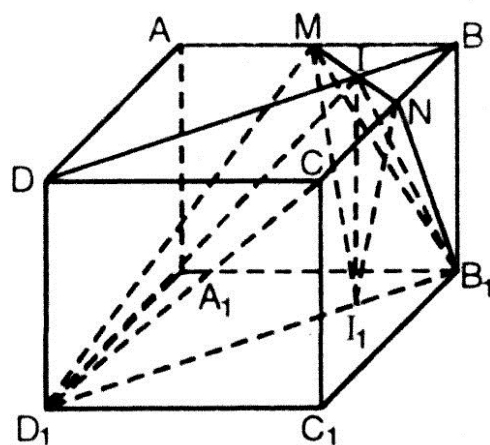
Chú ý. Việc tìm hệ thức liên hệ để hai mặt phẳng lập với nhau một góc cho trước phải được đưa về việc tìm hệ thức liên hệ để một góc của một tam giác được chọn thích hợp bằng góc cho trước đó.

Ví dụ 5. Hình hộp chữ nhật $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA_1 = b$, M, N là điểm giữa các đoạn AB, BC . Xét tứ diện $MNB_1 D_1$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b để nhị diện $B_1 D_1$ của tứ diện có số đo bằng $\pi/3$. Chứng minh rằng khi đó nhị diện MN của nó sẽ là nhị diện vuông.

Giải : (hình 106). Gọi I là giao điểm của MN và BD . Do $ABCD$ là



Hình 105



Hình 106

hình vuông nên $MN \perp BD$, I là điểm giữa MN và $IB = (1/3)ID$.

Gọi I_1 là hình chiếu của I trên mặt $A_1B_1C_1D_1$ thì $I_1 \in B_1D_1$ và $I_1B_1 = IB$. Ta có : $MN \perp B_1D_1$ và $H_1 \perp B_1D_1$ nên $B_1D_1 \perp (MNI_1)$.

Mặt phẳng (MNI_1) vuông góc với B_1D_1 và cắt các mặt (MB_1D_1) , (NB_1D_1) của tứ diện MNB_1D_1 theo các giao tuyến MI_1 và NI_1 , do đó $\widehat{MI_1N}$ là góc phẳng của nhị diện B_1D_1 của tứ diện đang xét.

Ta cần tìm điều kiện của a, b để góc này bằng $\frac{\pi}{3}$. Tam giác MI_1N có I_1I vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên là tam giác cân, do đó cần và đủ để $\widehat{MI_1N} = \frac{\pi}{3}$ là tam giác đều. Điều này tương đương với :

$$II_1 = MN \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ tức là : } b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}. \text{ Vậy hệ thức}$$

cần tìm là $b = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. Giả sử điều này được thỏa mãn. Dễ thấy

$B_1I \perp MN$ và $D_1I \perp MN$. Vậy $\widehat{B_1ID_1}$ là góc phẳng của nhị diện MN của tứ diện đang xét. Ta có :

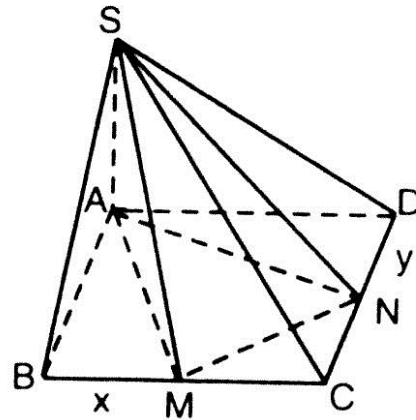
$$IB_1 \cdot ID_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{6a^2}{16} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4} \right)^2 = b^2 = II_1^2.$$

Tam giác IB_1D_1 có II_1 là đường cao, đẳng thức $IB_1 \cdot ID_1 = II_1^2$, chứng tỏ đó là tam giác vuông tại I . Tức là : $\widehat{B_1ID_1} = \pi/2$.

Ví dụ 6. Hình chóp tứ giác $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trong các đoạn BC, CD . Tìm hệ thức liên hệ giữa $x = BM$ và $y = DN$, để : a) nhị diện SM của tứ diện $SAMN$ là nhị diện vuông ; b) nhị diện SA của tứ diện đó có số đo bằng $\pi/6$.

Giải : (hình 107). Xét tứ diện SAMN.

a) Giả sử điều kiện a) được thỏa mãn, ta có : $(SMN) \perp (SMA)$. Mặt khác, do $SA \perp (ABCD)$, nên $(SMA) \perp (ABCD)$. Hai mặt phẳng (SMN) và $(ABCD)$ cùng vuông góc với mặt phẳng (SMA) nên giao tuyến NM của chúng phải vuông góc với mặt phẳng này.



Hình 107

Tức là $MN \perp (SMA)$, suy ra $MN \perp MA$. Vậy $\triangle NMA$ vuông tại M.

Ngược lại nếu $MN \perp MA$, thì do $MN \perp SA$ suy ra $MN \perp (SMA)$. Do đó sẽ có $(SMN) \perp (SMA)$.

Vậy cần và đủ để nhị diện (SM) vuông là tam giác NMA vuông tại M. Điều này tương đương với :

$$AM^2 + MN^2 = AN^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + BM^2 + MC^2 + CN^2 = ND^2 + DA^2,$$

$$\text{hay } a^2 + x^2 + (a - x)^2 + (a - y)^2 = y^2 + a^2.$$

Khai triển, đơn giản hai vế, hệ thức tìm được sẽ là :

$$a^2 - a(x + y) + x^2 = 0.$$

b) Dễ thấy $\widehat{MAN}$ là góc phẳng của nhị diện SA của tứ diện SAMN. Ta có :

$$\widehat{MAN} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \widehat{BAM} + \widehat{DAN} = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\operatorname{tg} \widehat{BAM} + \operatorname{tg} \widehat{DAN}}{1 - \operatorname{tg} \widehat{BAM} \cdot \operatorname{tg} \widehat{DAN}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{BM}{AB} + \frac{DN}{AD}}{1 - \frac{BM}{AB} - \frac{DN}{AD}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{a}}{1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a}} = \sqrt{3}.$$

Do đó hệ thức cần tìm sẽ là :

$$a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}.$$

Chú ý : Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau phải được chuyển về điều kiện để một tam giác nào đó là tam giác vuông. Tuy nhiên, góc vuông của tam giác đó không nhất thiết phải là góc phẳng của hai mặt phẳng đó. Hãy nhớ định lý "cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là một trong chúng có chứa đường thẳng vuông góc với mặt còn lại", (như trong phần a) của ví dụ 6, $\widehat{NMA}$ không phải là góc phẳng của hai mặt phẳng (SAM) và (SMN).

§3. Bài toán cực trị

Bài toán : Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của một đại lượng hình học biến thiên f (độ dài đoạn thẳng, diện tích đa giác, thể tích khối đa diện...) yêu cầu phải tìm được các giá trị f_1, f_2 cố định luôn luôn thoả mãn bất đẳng thức :

$$f_1 \leq f \leq f_2,$$

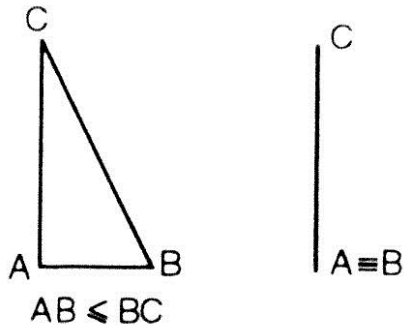
đồng thời chỉ rõ các vị trí hình học của đại lượng biến thiên đang xét, để tại đó f sẽ đạt được giá trị nhỏ nhất f_1 hoặc lớn nhất f_2 . Đôi khi bài toán chỉ yêu cầu tìm một trong hai giá trị này.

Những phương pháp thường dùng để giải bài toán loại này là :

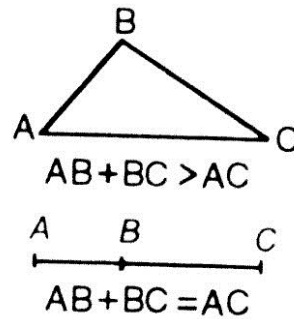
1. Dùng các bất đẳng thức trong tam giác để so sánh trực tiếp f với một đại lượng cố định đã chọn.

Cần chú ý tới các bất đẳng thức sau đây :

a) Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $AB \leq BC$. Dấu "=" có và chỉ có khi tam giác này suy biến thành đoạn thẳng, tức là khi $B \equiv A$ (hình 108).



Hình 108



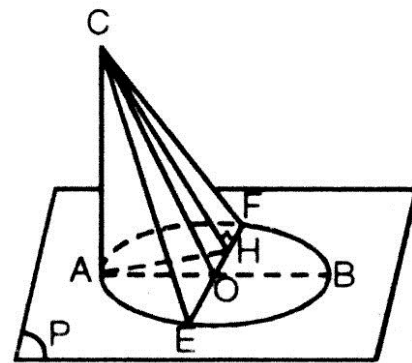
Hình 109

b) Với $\triangle ABC$ tùy ý ta luôn có :

1) $AB + BC \geq AC$, "=" sẽ có và chỉ có khi $\triangle ABC$ suy biến : đỉnh B nằm trong đoạn AC (hình 109).

2) $AB \geq BC \Leftrightarrow \widehat{ACB} \geq \widehat{BAC}$ (đối diện với cạnh lớn hơn là góc lớn hơn và ngược lại).

Ví dụ 1. Cho trên mặt phẳng P một đường tròn đường kính $AB = 2R$. Đoạn $CA = 2R$ vuông góc với P. Giả sử EF là đường kính thay đổi của đường tròn đã cho. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích tam giác CEF.



Hình 110

Giải : (hình 110). Gọi tâm của đường tròn đã cho là O. Kẻ đường cao CH của $\triangle CEF$. Do EF là đường kính nên $EF = 2R$ và các điểm O, H cùng nằm trên EF.

$$\text{Ta có : } s(\text{CEF}) = \frac{1}{2} EF \cdot CH = R \cdot CH.$$

Do đó giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $s(\text{CEF})$ sẽ tương ứng với các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của độ dài đoạn CH. Trong tam giác vuông CHO, do CO là cạnh huyền, nên :

$$CH \leq CO = \sqrt{CA^2 + AO^2} = R\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } s(CEF) = R \cdot CH \leq R \cdot CO = R^2\sqrt{5}.$$

Dấu "=" đạt được khi $H \equiv O$ hay $CO \perp EF$. Lúc này theo định lý ba đường vuông góc sẽ có $AO \perp EF$. Vậy EF là đường kính vuông góc với AB .

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích cần tìm là $R^2\sqrt{5}$.

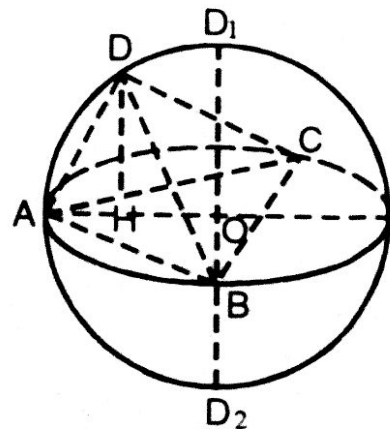
Còn trong tam giác vuông CAH , do CH là cạnh huyền nên

$$CH \geq CA = 2R \Rightarrow s(CEF) \geq 2R^2.$$

Dấu "=" đạt được khi $H \equiv A$. Dễ thấy lúc này EF trùng với đường kính AB . Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là $2R^2$.

Ví dụ 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Một điểm D chuyển động trong không gian sao cho mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nhận đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ làm đường tròn lớn. Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện này.

Giải : (hình 111). Do bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, nên nếu gọi tâm $\triangle ABC$ là O ,



Hình 111

thì theo điều kiện của đầu bài ta có : $OD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Hạ đường cao DH của tứ diện ta có :

$$v(ABCD) = \frac{1}{3} s(ABC) \cdot DH = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} DH.$$

Vậy để tìm giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ ta chỉ cần tìm giá trị lớn nhất của DH .

Trong tam giác vuông DHO :

$$DH \leq DO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ nên } v(ABCD) \leq \frac{a^3}{12}.$$

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là : $\frac{a^3}{12}$ đạt được khi $H \equiv O$, tức là khi D nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của ΔABC tại tâm O của nó, và cách O một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Có hai điểm D như vậy (D_1 và D_2 trong hình 111).

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh a. Một điểm M chuyển động trong đoạn AA_1 . Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích mặt cắt giữa mặt phẳng (MBD_1) với hình lập phương.

Giải : (hình 112). Dễ thấy mặt cắt cần xét là hình bình hành $MBND_1$ ($N \in CC_1$).

Hạ $MI \perp BD_1$ ($I \in BD_1$) thì

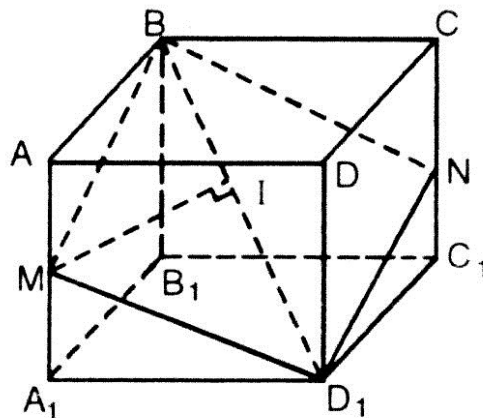
$$S_{mc} = 2s(MBD_1) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} BD_1 \cdot MI = a\sqrt{3} \cdot MI.$$

Do đó diện tích này sẽ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, tức là khi MI là đường vuông góc chung của AA_1 và BD_1 . Theo ví dụ 9 của §1, khi này M là điểm giữa AA_1 và $MI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó, giá trị nhỏ nhất cần tìm sẽ là :

$$a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}.$$

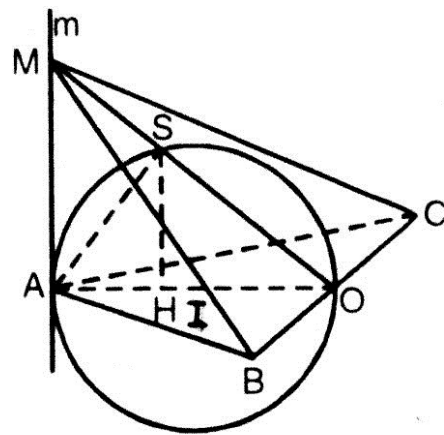
Ví dụ 4. Cho tam giác vuông ABC, $AB = AC = a$. Một điểm M chuyển động trên đường thẳng m vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A. S là hình chiếu của A trên mặt phẳng (MBC). Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SABC.



Hình 112

Giải : (hình 113). Do $AB = AC$, nên $\triangle ABC$ vuông tại A . Gọi O là điểm giữa đoạn BC thì $AO \perp BC$. Mặt khác $MA \perp BC$. Vậy $BC \perp (MAO)$.

Do đó nếu lấy đường cao của tam giác MAO là AS thì $AS \perp (MBC)$. Vậy S nằm trong mặt phẳng cố định, là mặt phẳng (O, m) . Trong mặt phẳng này S nhìn đoạn AO dưới góc vuông, nên S nằm trên đường tròn đường kính AO của mặt phẳng (O, m) .



Hình 113

Hạ đường cao SH của tứ diện $SABC$. Ta có $SH \parallel MA$ nên $H \in AO$, và $v(SABC) = \frac{1}{3} s(ABC) \cdot SH = \frac{a^2}{6} \cdot SH$.

Gọi I là điểm giữa đoạn AO , trong tam giác vuông SHI có :

$$SH \leq SI = \frac{1}{2} AO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

nên ta có $v(SABC) \leq \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$, đạt được khi $H \equiv I$, tức là SI là đường trung bình của $\triangle MAO \Rightarrow MA = 2SI = AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, tức là khi M cách A một đoạn bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Trên đường thẳng m có hai điểm M như vậy.

Ví dụ 5. Hình chóp $SABCD$ có tám cạnh đều bằng a . M, N là điểm giữa các đoạn SA, SC .

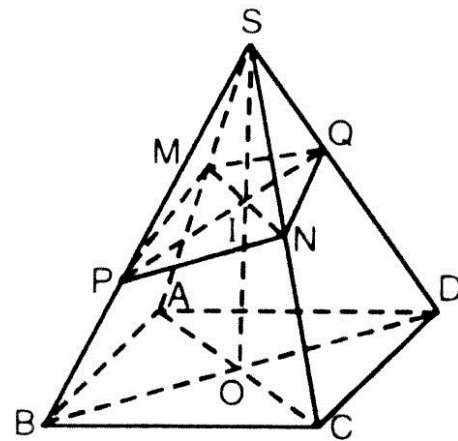
a) Chứng minh rằng đây là hình chóp đều. Đồng thời các tam giác SCA và SBD đều vuông ở S .

b) Một mặt phẳng α thay đổi luôn đi qua M, N cắt các đoạn SB, SD lần lượt tại P, Q. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác MPNQ.

Giải : a) Bạn đọc tự chứng minh.

b) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Bạn đọc hãy chứng minh rằng hai đoạn MN, PQ vuông góc với nhau và cắt nhau tại điểm giữa I của SO (hình 114). Do đó

$$S_{mc} = \frac{1}{2} MN \cdot PQ = \frac{a\sqrt{2}}{4} PQ$$



Hình 114

Vậy chỉ cần tìm giá trị nhỏ nhất của PQ. Không mất tổng quát, có thể giả sử $SP > \frac{SB}{2} = \frac{a}{2}$.

Trường hợp $SQ > \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$ được giải tương tự.

Lấy các điểm giữa P_1, Q_1 của SB và SD (hình 115), vậy $\triangle SP_1Q_1$ vuông cân và I là điểm giữa đoạn P_1Q_1 .

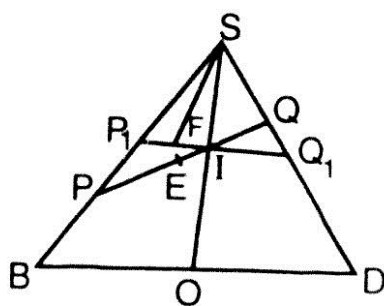
$$\angle IQQ_1 \text{ có } Q = \widehat{QSP} + \widehat{SPQ} = \frac{\pi}{2} + \widehat{SPQ} \geq \frac{\pi}{2} \text{ nên } IQ \leq IQ_1. \quad (1)$$

Tam giác IPP_1 có

$$\widehat{IP_1P} = \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{2} \text{ nên } IP \geq IP_1. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IP \geq IP_1 = IQ_1 \geq IQ$.

Vậy nếu gọi E là điểm giữa đoạn PQ thì $E \in IP$, tức là E nằm ngoài tam giác SP_1Q_1 . Do đó SE sẽ cắt



Hình 115

P_1Q_1 tại một điểm F. Do SIF cũng là tam giác vuông, nên :

$$PQ = 2SE \geq 2SF \geq 2SI = P_1Q_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

PQ nhỏ nhất là bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, nên diện tích tứ giác nhỏ nhất sẽ là $\frac{a^2}{4}$. Diện tích đó đạt được khi PQ chiếm vị trí P_1Q_1 . Lúc này α đi qua MN song song với đáy.

2. Dùng một hệ thức liên hệ và một đẳng thức đại số. Phương pháp này thường được dùng khi đại lượng f đang xét có thể biểu thị thành một biểu thức của hai đại lượng x, y thay đổi, nhưng được ràng buộc với nhau bởi một hệ thức liên hệ.

Các bất đẳng thức đại số thường dùng ở đây là :

Với x và y là hai số dương tùy ý, ta luôn có :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (1)$$

Các dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

Ví dụ 6. Cho trên mặt phẳng α hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $BC = b$. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trên các đường thẳng m, n vuông góc với α tại A, B sao cho luôn có $DM \perp CN$. Đặt : $AM = x$, $BN = y$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y.

b) Tính thể tích tứ diện CDMN theo a, b, x, y. Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của thể tích đó.

Giải : a) Từ M kẻ $MM_1 \parallel AB$ ($M_1 \in n$). Dễ thấy $M_1C \parallel MD$ và $M_1B = MA = x$ (hình 116). Do $MD \perp NC$, nên $\widehat{M_1CN} = \pi/2$.

Trong tam giác vuông CM_1N ,
 CB là đường cao hạ xuống cạnh
 huyền nên $BM_1 \cdot BN = BC^2$ hay

$$xy = b^2 \quad (2)$$

Đó là hệ thức liên hệ cần tìm.

b) Gọi giao điểm của MN và
 AB là I . Dễ thấy :

$$s(ICD) = \frac{1}{2}ab \text{ và } v(CDMN) =$$

$$= v(CDIM) + v(CDIN) =$$

$$= \frac{1}{3} MA \cdot s(ICD) + \frac{1}{3} NB \cdot s(ICD) = \frac{1}{6} ab(x + y).$$

Hình 116

Áp dụng bất đẳng thức (1) và hệ thức liên hệ (2) ta có :

$$v(CDMN) = \frac{1}{6} ab(x + y) \geq \frac{1}{6} ab 2\sqrt{xy} = \frac{1}{6} ab \cdot 2b.$$

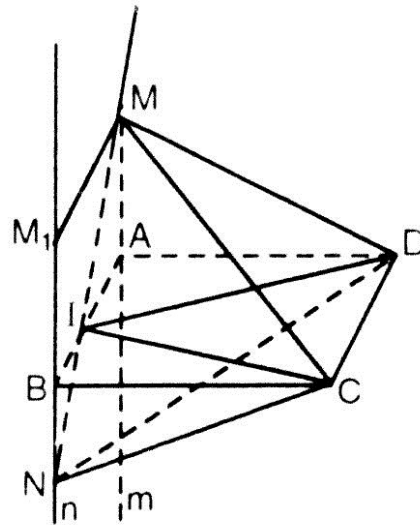
$$\text{Vậy :} \quad v(CDMN) \geq \frac{ab^2}{3} \quad (3)$$

Dấu "=" có khi $x = y$. Thay giá trị này vào (2), sẽ tính được :

$x = y = b$. Từ (3) suy ra giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện
 $CDMN$ là $\frac{ab^2}{3}$, đạt được khi $AM = BN = b$, (M, N khác phía
 đối với mặt $(ABCD)$).

Ví dụ 7. Hai nửa đường thẳng Am, Bn chéo nhau và vuông
 góc với nhau, nhận $AB = a$ làm đường vuông góc chung. Các
 điểm M, N lần lượt chuyển động trên Am, Bn sao cho độ dài
 đoạn MN luôn bằng b không đổi. Xét tứ diện $ABMN$.

a) Chứng minh rằng các mặt của tứ diện đều là tam giác
 vuông.

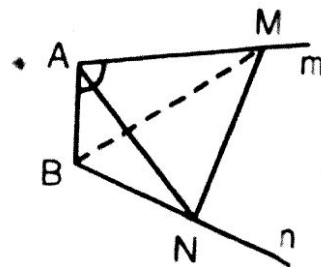


b) Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện theo a , $x = AM$, $y = BN$.

c) Xác định giá trị lớn nhất của các đại lượng đó.

Giải : (hình 117).

a) Dễ thấy $\triangle ABM$ vuông tại A và $\triangle ABN$ vuông tại B.



Hình 117

Do $MA \perp AB$ và $MA \perp BN$ nên $MA \perp (ABN)$. Suy ra $MA \perp AN$.

Vậy $\triangle MAN$ vuông tại A. Tương tự $\triangle MBN$ vuông tại B.

b) Do $MA \perp (ABN)$, nên :

$$v(ABMN) = \frac{1}{3} MA \cdot s(ABN) = \frac{1}{3} MA \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BN = \frac{1}{6} axy. \quad (1)$$

Do tứ diện ABMN có các mặt đều là tam giác vuông nên :

$$\begin{aligned} S_{tp} &= s(MAB) + s(NAB) + s(MAN) + s(MBN) = \\ &= \frac{1}{2} MA \cdot AB + \frac{1}{2} NB \cdot AB + \frac{1}{2} MA \cdot AN + \frac{1}{2} NB \cdot BM = \\ &= a \cdot \frac{x+y}{2} + \frac{x\sqrt{a^2+y^2} + y\sqrt{a^2+x^2}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

c) Xét các tam giác vuông MAN và ABN, ta có :

$$MN^2 = MA^2 + AN^2 = MA^2 + AB^2 + BN^2 = x^2 + a^2 + y^2.$$

Do $MN = b$, nên giữa x và y có hệ thức liên hệ :

$$x^2 + y^2 = b^2 - a^2. \quad (3)$$

Dùng bất đẳng thức (1) và hệ thức (3) ta có :

$$v(ABMN) = \frac{a}{6} xy \leq \frac{a}{6} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{1}{12} a(b^2 - a^2).$$

Do đó giá trị lớn nhất của thể tích đang xét là $\frac{1}{12} a(b^2 - a^2)$ và đạt được khi $x = y$. Thay vào (3) ta được :

$$x = y = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}.$$

Để tìm giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần ta đánh giá từng số hạng đã nhóm của nó trong (2) :

$$a \cdot \frac{x+y}{2} \leq a \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = a \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}. \quad (4)$$

Dấu "=" có khi $x = y = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}$. Còn

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{a^2+y^2} + y\sqrt{a^2+x^2}}{2} &\leq \sqrt{\frac{(x\sqrt{a^2+y^2})^2 + (y\sqrt{a^2+x^2})^2}{2}} = \\ &= \sqrt{(xy)^2 + \frac{a^2(x^2+y^2)}{2}} \leq \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 + \frac{a^2(x^2+y^2)}{2}} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) \left(\frac{b^2+a^2}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Dấu "=" xảy ra khi có cả ba điều kiện :

$$\left. \begin{aligned} x\sqrt{a^2+y^2} &= y\sqrt{a^2+x^2} \\ x &= y \\ x^2+y^2 &= b^2-a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x \equiv y = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}}.$$

Thay (4), (5) vào (2) ta được :

$$\begin{aligned} S_{tp} &\leq a \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} + \sqrt{\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)} = \\ &= \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2}} \left(a + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \right). \end{aligned}$$

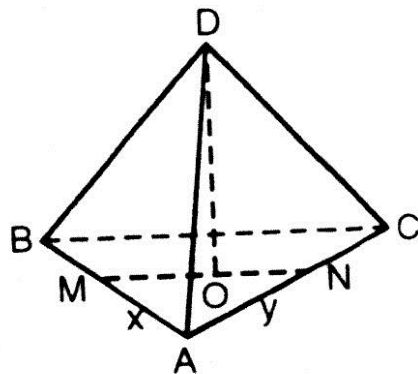
Vậy giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần đang xét là :

$$\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}} \left(a + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \right) \text{ và giá trị đó đạt được khi}$$

$$x = y = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{2}}.$$

Ví dụ 8. ABCD là tứ diện đều có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trong các đoạn AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) luôn vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đặt $AM = x$, $AN = y$.

- Chứng minh hệ thức : $x + y = 3xy$.
- Xác định các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện ADMN.



Hình 118

Giải : a) Hạ $DO \perp (ABC)$. Do ABCD là tứ diện đều, nên O là tâm của tam giác đều ABC. Mặt phẳng (DMN) muốn vuông góc với mặt phẳng (ABC) sẽ phải chứa đường DO và ngược lại. Do đó ta luôn có đường MN đi qua O. Áp dụng kết quả của ví dụ 1§2 với $d = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ và $\alpha = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, hệ thức liên

hệ giữa x và y sẽ là : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{d} = 3$ hay $x + y = 3xy$.

b) Hình 118. Do ABCD là tứ diện đều nên :

$$DO = \frac{\sqrt{6}}{3} AB = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Vậy } v(ADMN) = \frac{1}{3} DO \cdot s(AMN) =$$

$$= \frac{1}{3} DO \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AN \cdot \sin \widehat{MAN} = \frac{\sqrt{2}}{12} xy. \quad (1)$$

$$\text{Trong } \triangle AMN : MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \widehat{MAN} = \\ = x^2 + y^2 - xy.$$

$$\text{Vậy : } MN = \sqrt{x^2 + y^2 - xy},$$

$$\text{và } S_{tp} = s(AMD) + s(AND) + s(AMN) + s(DMN) = \\ = \frac{x\sqrt{3}}{4} + \frac{y\sqrt{3}}{4} + \frac{xy\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{x^2 + y^2 - xy} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{4} [(x + y) + xy] + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{(x + y)^2 - 3xy}. \quad (2)$$

Thay $(x + y) = 3xy$ vào (2) ta được :

$$S_{tp} = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6} \sqrt{3xy(3xy - 1)}. \quad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện ADMN đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, khi tích xy đạt được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

Do giả thiết M, N chuyển động trong các đoạn AB, AC mà $AB = AC = 1$, nên $0 \leq x, y \leq 1$.

Đặt $xy = t \geq 0$. Ta cần đánh giá t . Theo hệ thức liên hệ câu a) ta có $x + y = 3xy = 3t$.

Vậy x và y sẽ là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 3tz + t = 0$. Do đó những giá trị có thể có của t là những giá trị làm cho tam thức $f(z) = z^2 - 3tz + t$ có hai nghiệm đều nằm trong đoạn $[0, 1]$. Muốn vậy trước tiên :

$$\Delta = 9t^2 - 4t = t(9t - 4) \geq 0, \text{ mà } t \geq 0 \text{ nên}$$

$$t \geq \frac{4}{9}. \quad (4)$$

$$\text{Xét : } f(0) = t \geq 0, f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - t \leq 0$$

Vậy $f(0) f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0$. Do đó trong đoạn $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ tam thức $f(z)$ chỉ có một nghiệm. Vậy giá trị cần có của t phải làm cho $f(z)$ có một nghiệm nữa nằm trong khoảng $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, tức là $f\left(\frac{2}{3}\right) \cdot f(1) \leq 0$. Mặt khác $f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0$ nên

$$f(1) = 1 - 2t \geq 0. \text{ Vậy } t \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta được :

$$\frac{4}{9} \leq t = xy \leq \frac{1}{2}.$$

Giá trị $t = \frac{4}{9}$ làm cho phương trình $f(z) = 0$ có nghiệm kép bằng $\frac{2}{3}$, nên $x = y = \frac{2}{3}$.

Giá trị $t = \frac{1}{2}$ làm cho phương trình đó có nghiệm $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$, nên

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Do đó, giá trị nhỏ nhất của $v(\text{ADMN})$ và S_{tp} tương ứng là : $\frac{\sqrt{2}}{27}$ và $\frac{\sqrt{3}}{9} (4 + \sqrt{2})$, chúng đạt được khi $AM = AN = \frac{2}{3}$. Còn giá trị lớn nhất của chúng sẽ là : $\frac{\sqrt{2}}{24}$ và $\frac{1}{4} (2\sqrt{3} + \sqrt{2})$ đạt được khi $AM = 1$ ($M \equiv B$), $AN = \frac{1}{2}$ hoặc :

$$AM = \frac{1}{2}, AN = 1 \quad (N \equiv C).$$

3. Tính đại lượng f đang xét theo chỉ một đại lượng thay đổi x , tìm miền xác định của x và khảo sát cực trị của hàm f nhận được trong miền đó.

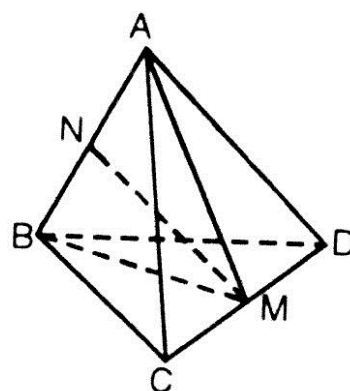
Ví dụ 9. Tứ diện ABCD có $AB = x$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Tính thể tích tứ diện theo x . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích đó.

Giải : Gọi M, N là điểm giữa các đoạn CD, AB (hình 119). Do ACD, BCD là các tam giác đều nên :

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp CD \\ BM \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (ABM), \text{ và}$$

$$v(ABCD) = v(CABM) + v(DABM)$$

$$= \frac{1}{3} s(ABM). \quad (1)$$



Hình 119

$$\text{Do } AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } MN \perp AB \text{ và } MN^2 = AM^2 - AN^2 =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{x^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(ABM) = \frac{1}{2} AB \cdot MN = \frac{1}{4} x \sqrt{3 - x^2}. \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) : } v(ABCD) = \frac{1}{12} x \sqrt{3 - x^2}. \quad (3)$$

Từ (3) có thể khảo sát hàm số đó để tìm ra giá trị lớn nhất của thể tích đang xét. Nhưng trong bài toán này có thể áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số $x, \sqrt{3 - x^2}$ để giải như sau :

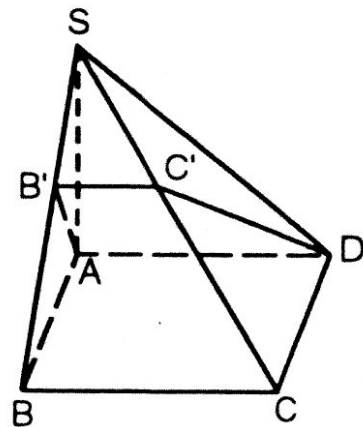
$$v(ABCD) = \frac{1}{12} x \sqrt{3 - x^2} \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{x^2 + (3 - x^2)}{2} = \frac{1}{8}.$$

Do đó giá trị lớn nhất của $v(ABCD)$ là $\frac{1}{8}$. Đạt được khi

$$x = \sqrt{3 - x^2} \text{ hay } x = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Giá trị $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$ chấp nhận được vì điều kiện $x = \sqrt{3 - x^2}$ tương đương điều kiện $MN = AN$, tức là $\triangle AMB$ cân, vuông tại M . Suy ra $(ACD) \perp (BCD)$. Lúc này tứ diện $ABCD$ có hai mặt ACD và BCD là hai tam giác đều, nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Ví dụ 10. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Đoạn $SA = a\sqrt{3}$ vuông góc với đáy. Một điểm B' chuyển động trong đoạn SB . Mặt phẳng (ADB') cắt SC tại C' . Đặt y là tổng bình phương các cạnh của tứ giác $ADC'B'$. Hãy tính y theo $x = SB'$. Từ đó hãy xác định các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của y .



Hình 120

Giải : (hình 120). Mặt phẳng (ADB') chứa $AD \parallel BC$ nên giao tuyến $B'C'$ của nó với mặt phẳng SBC sẽ song song với BC . Do đó, trong $\triangle SBC$ ta có :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SB'}{SB} = \frac{x}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{x}{2a} \Rightarrow B'C' = \frac{x}{2a} BC = \frac{x}{2}. \quad (1)$$

Dùng định lý hàm số cosin cho $\triangle SAB'$ ta có

$$\begin{aligned} AB'^2 &= SA^2 + SB'^2 - 2SA \cdot SB' \cdot \cos \widehat{ASB'} = \\ &= SA^2 + SB'^2 - 2SA \cdot SB' \cdot \frac{SA}{SB} = 3a^2 + x^2 - 3ax. \end{aligned}$$

Do $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow \Delta CDS$ vuông tại D, nên trong tam giác SDC' :

$$\begin{aligned} DC'^2 &= SD^2 + SC'^2 - 2SD \cdot SC' \cdot \cos \widehat{DSC'} = \\ &= SD^2 + SC'^2 - 2SD \cdot SC' \cdot \frac{SD}{SC}. \end{aligned}$$

Ta cần tính SD , SC , SC' :

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 2a, \quad SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{5},$$

$$SC' = SC \cdot \frac{SB'}{SB} = \frac{x\sqrt{5}}{2} \Rightarrow DC'^2 = 4a^2 + \frac{5x^2}{4} - 4ax. \quad (3)$$

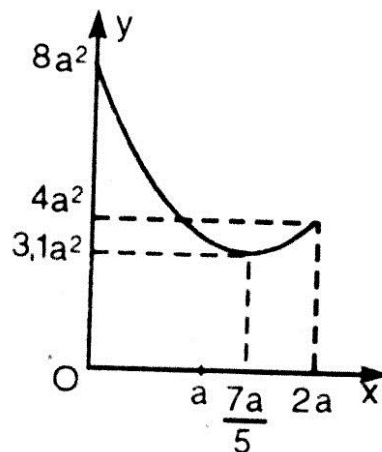
Từ (1), (2), (3) tính được :

$$y = DA^2 + AB'^2 + B'C'^2 + C'D^2 = \frac{5x^2}{2} - 7ax + 8a^2.$$

Do B' chuyển động trong đoạn SB có độ dài $2a$, nên

$$0 \leq x = SB' \leq SB = 2a.$$

Vậy giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của y là các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm $y(x) = (5/2)x^2 - 7ax + 8a^2$ trong đoạn $[0, 2a]$. Đồ thị của hàm này trong đoạn đang xét được biểu thị bởi một cung parabol trong hình 121, do đó :



Hình 121

$$y_{\min} = 3,1a^2, \text{ đạt được khi } x = SB' = \frac{7a}{5};$$

$$y_{\max} = 8a^2, \text{ đạt được khi } x = 0 \text{ (} B' \equiv C' \equiv S \text{)}.$$

Ví dụ 11. Với các giả thiết của ví dụ 10 hãy xác định các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của diện tích tứ giác $DAB'C'$.

Giải : (hình 120). Để chứng minh $DAB'C'$ là hình thang vuông tại A và B', do đó :

$$\begin{aligned} S &= S(DAB'C') = \frac{1}{2} (AD + B'C')AB' = \\ &= \frac{(x + 2a)\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}}{4} \end{aligned}$$

Vậy việc giải bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x) = \frac{1}{4} (x + 2a) \sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2} \text{ trong đoạn } [0, 2a].$$

Ta có :

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 5ax}{8\sqrt{x^2 - 3ax + 3a^2}}$$

Đạo hàm $f'(x)$ triệt tiêu khi $x = 0$ hoặc $x = \frac{5a}{4}$. Bảng biến thiên của hàm này trong đoạn $[0, 2a]$ như sau :

x	0		$\frac{5a}{4}$		2a	
f'	+	0	-	0	+	+
f		$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$		$\frac{13a^2\sqrt{13}}{64}$		a^2

Do đó :

$$S_{\min} = \frac{13a^2\sqrt{13}}{64} \text{ đạt được khi } x = SB' = \frac{5a}{4} ;$$

$$S_{\max} = a^2 \text{ đạt được khi } x = 2a \text{ (} B' \equiv B \text{)}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG IV

1. Cho hai hình chữ nhật ABCD và ABEF nằm trên 2 mặt phẳng α, β .

a) Giả sử $g(\alpha, \beta) = \pi/4$, $g(BD, AE) = \pi/2$, $AD = 1$, $AF = \sqrt{2}$.
Tính độ dài BD. Dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường (AD, AE).

Tính góc và khoảng cách giữa hai đường (AC, BF).

b) Giả sử $g(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2}$, $AB = 1$, $AD = AF = \sqrt{2}$.

Xác định góc, dựng đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa (AC, BF).

2. Cho hình lập phương ABCDA₁B₁C₁D₁ có cạnh bằng 1. M, N, P, Q là điểm giữa các đoạn AB, BC, C₁D₁, CC₁. Tính góc, khoảng cách và dựng đường vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau đây : (DN, A₁P) ; (MN, AP) ; (NP, B₁D) ; (AN, BC₁) ; (AN, DQ) ; (AN, DP).

3. Cho trên mặt phẳng α đường tròn S đường kính AB = 2R. Đoạn SA = 2R vuông góc với α . Điểm M chuyển động trên S và β là mặt phẳng qua A, vuông góc với SB. Xác định giá trị lớn nhất của diện tích mặt cắt giữa β với hình chóp SABM và vị trí của điểm M ứng với giá trị đó.

4. Hình chóp tứ giác SABCD có tám cạnh đều bằng a.

a) Chứng minh rằng đây là hình chóp đều.

b) Một mặt phẳng P thay đổi song song với đáy SA, SB, SC, SD tại A', B', C', D'.

Gọi A₁, B₁, C₁, D₁ hình chiếu của các điểm A', B', C', D' trên đáy. Tìm vị trí của P sao cho thể tích hình hộp A'B'C'D'A₁B₁C₁D₁ có giá trị lớn nhất. Tính giá trị đó.

5. Cho trên mặt phẳng α một đường tròn S đường kính AB = 2R. M là một điểm tùy ý thuộc S. Nửa đường thẳng Mx vuông góc

với mặt phẳng α và luôn ở cùng một phía đối với α . N là một điểm thuộc Mx và H là hình chiếu của M trên mặt phẳng NAB.

a) Chứng minh rằng H là trực tâm $\triangle NAB$.

b) Giả sử M cố định và cách đường thẳng AB một khoảng bằng h. Hãy xác định vị trí của N trên Mx để hình chóp HMAB có thể tích lớn nhất. Hãy tính thể tích lớn nhất đó theo R và h.

c) Xác định vị trí của M để thể tích hình chóp HMAB có giá trị lớn nhất và tính giá trị đó.

6. Cho trên mặt phẳng α một tam giác SAB có $SA = SB = a$, $\widehat{ASB} = \frac{2\pi}{3}$. Một điểm C chuyển động luôn nằm về một phía của α và luôn giữ cho SAC là tam giác đều.

a) Chứng minh rằng quỹ tích của C là một nửa đường tròn. Xác định mặt phẳng, tâm, bán kính và các đầu mút của nửa đường tròn đó.

b) Tìm quỹ tích hình chiếu H của S trên mặt phẳng ABC.

c) Tìm quỹ tích hình chiếu K của C trên mặt phẳng α . Từ đó hãy xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện SABC và cách dựng điểm C ứng với giá trị đó.

d) Tam giác ABC có thể là tam giác vuông không ?

Nếu có, hãy nói rõ cách dựng điểm C và tính thể tích tứ diện SABC trong trường hợp đó.

7. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Điểm M chuyển động trong không gian luôn nhìn hai đoạn AB, AD dưới góc vuông.

a) Chứng minh rằng quỹ tích của M là một đường tròn S. Xác định mặt phẳng, tâm và bán kính của đường tròn này. Từ đó, hãy tính giá trị lớn nhất của thể tích hình chóp MABCD.

b) Gọi P là mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng của hình vuông theo giao tuyến AB . M' là giao điểm của đường thẳng DM với P . Tìm quỹ tích của M' .

c) Đặt $DM = x$, $MM' = y$. Chứng minh hệ thức $x(x + y) = a^2$.

d) Đường thẳng CM cắt đường tròn S tại điểm thứ hai là N . Đường DN cắt P tại N' . Chứng minh rằng $M'N' \parallel AB$.

e) Chứng minh hệ thức : $\sin^2 \widehat{MDB} + \sin^2 \widehat{NDB} = \frac{1}{2}$.

8. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Các nửa đường thẳng Bm , Dn vuông góc với mặt phẳng của hình vuông và ở cùng phía đối với mặt phẳng này. Các điểm M , N lần lượt chuyển động trên Bm , Dn . Đặt $BM = x$, $DN = y$, xét tứ diện $ACMN$.

a) Tính thể tích tứ diện theo a , x , y .

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để nhị diện AC của tứ diện là nhị diện vuông.

Sau đây, giả sử điều kiện ở câu b) được nghiệm đúng :

c) Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích ở câu a).

d) Gọi HK là đường vuông góc chung của AC và MN ($H \in AC$, $K \in MN$). Chứng minh rằng H cố định, độ dài HK không đổi. Từ đó hãy tìm quỹ tích điểm K .

e) Chứng minh rằng nhị diện MN của tứ diện đang xét cũng là nhị diện vuông.

9. Cho tam giác đều ABC cạnh a , tâm O . Điểm M chuyển động trên đường thẳng m vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A .

a) Xét tam giác MBC . Gọi BE , CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác này. Tính quỹ tích các điểm E , F , H .

b) Chứng minh rằng đường OH cắt m tại một điểm N và tứ diện $BCMN$ có các cạnh đối diện vuông góc với nhau.

c) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x = AM$ và $y = BN$. Từ đó hãy xác định giá trị nhỏ nhất của thể tích tứ diện BCMN.

10. Trong mặt phẳng P cho nửa đường tròn S tâm O đường kính $AB = 2R$. I là điểm giữa đoạn OA. Đường thẳng vuông góc với AB tại I trong P cắt S tại D. Điểm M chuyển động trên S và H là hình chiếu của M xuống AB. Đặt $AH = x$. Hai đường AM và ID cắt nhau tại K. Giả sử K luôn nằm trong đoạn ID.

a) Xác định các giá trị nhận được của x .

b) Chứng minh rằng $KA \cdot KM = \frac{R^2(2x - R)}{2x}$.

c) Gọi S' là nửa đường tròn đường kính AM nằm trong mặt phẳng vuông góc với P. Đường thẳng vuông góc với P tại K cắt S' tại E. Chứng minh rằng các mặt của tứ diện MABE đều là các tam giác vuông. Từ đó, hãy tìm quỹ tích của E.

d) Tính giá trị $y = KE^2$ theo R, x. Dựng đồ thị của hàm nhận được.

e) Tính thể tích tứ diện MABE theo x và giá trị lớn nhất của nó.

11. Hình chóp tứ giác SABCD có đáy là hình vuông cạnh a . $SA = 2a$ vuông góc với đáy. Các điểm M, N lần lượt chuyển động trong các đoạn BC, CD. Đặt $BM = x$, $DN = y$.

a) Tính thể tích tứ diện SAMN theo a, x, y.

b) Giả sử M, N chuyển động sao cho góc nhị diện cạnh SA của tứ diện SAMN luôn bằng $\frac{\pi}{4}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x, y.

c) Giả sử điều kiện ở câu b) được thỏa mãn. Xác định các giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của thể tích tứ diện SAMN.

12*. Hai nửa đường thẳng Am , Bn vuông góc với nhau và nhận $AB = a$ làm đường vuông góc chung. Các điểm M , N lần lượt chuyển động trên Ax , By sao cho ta luôn có $MN = AM + BN$.

a) Tìm hệ thức liên hệ giữa $x = AM$ và $y = BN$. Chứng minh rằng tứ diện $ABMN$ có thể tích không đổi. Tính giá trị không đổi đó.

b) O là điểm giữa AB và H là hình chiếu của O trên MN . Chứng minh rằng $MH = x$, $NH = y$. Từ đó suy ra quỹ tích của H là một nửa đường tròn. Xác định mặt phẳng tâm và bán kính của nửa đường tròn đó.

c) Chứng minh rằng đường thẳng MN lập với mặt phẳng quỹ tích câu b) một góc không đổi. Tính giá trị góc đó.

d) Chứng minh hệ thức

$$\frac{v(\text{HOAM})}{v(\text{HOBN})} = \frac{x}{y} \quad (1)$$

Chứng minh rằng : nếu hệ thức (1) nghiệm đúng và khác 1, thì ta sẽ có $MN = AM + BN$.

13*. Tứ diện $ABCD$ có $DA = BC = a$, $DB = CA = b$, $DC = AB = c$.

a) Tính thể tích tứ diện.

b) Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

c) Đặt $\alpha = g(DA, BC)$, $\beta = g(DB, CA)$, $\gamma = g(DC, AB)$.

Hãy tính các giá trị của α , β , γ . Chứng minh rằng trong ba số hạng : $a^2 \cos \alpha$, $b^2 \cos \beta$, $c^2 \cos \gamma$ sẽ có một số hạng bằng tổng hai số hạng còn lại.

d) Tìm vị trí của điểm M trong không gian, sao cho tổng $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị đó.

14*. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a , b , c . Với một mặt phẳng α đã cho, phải đặt hình hộp ở vị trí nào để hình

chiếu của nó trên α có diện tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó.

Giải bài toán tương tự, khi thay hình hộp chữ nhật bởi tứ diện đều có cạnh bằng a .

15*. Độ dài cạnh của hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ là a , E và F là điểm giữa các đoạn BC , CC_1 . Một điểm I chuyển động trong đoạn AA_1 . Mặt phẳng α qua I , song song với đáy $ABCD$ cắt các đường $A_1 E$, DF , AD_1 lần lượt tại M , N , P .

a) Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác MNP .

b) Tính diện tích tam giác MNP theo a và $x = IA$.

Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích này.

16*. Chứng minh rằng với mọi tứ diện ta đều tìm được trong không gian 2 mặt phẳng vuông góc với nhau sao cho tỷ số diện tích các hình chiếu của tứ diện lên hai mặt phẳng đó không nhỏ hơn $\sqrt{2}$.

17*. Cho tứ diện $ABCD$. Một điểm M nằm trong tứ diện. Các đường AM , BM , CM , DM cắt các mặt đối diện tương ứng tại A_1 , B_1 , C_1 , D_1 . Chứng minh rằng : $v(A_1 B_1 C_1 D_1) \leq \frac{1}{27} v(ABCD)$.

18* Tứ diện $ABCD$ có $AC \perp BC$, $AD \perp BD$. Gọi α là góc lập bởi hai đường thẳng AC và BD . Chứng minh rằng :

$$\cos \alpha < \frac{CD}{AB}.$$

19*. Cho trước mặt phẳng P , một điểm A cố định trên P và một điểm B cố định không thuộc mặt phẳng này. Hãy tìm trên P một điểm M để tỷ số

$$\frac{AB + AM}{BM}$$

đạt giá trị lớn nhất.

20⁺ Hình hộp chữ nhật có các kích thước là a, b, c . Gọi P là tổng độ dài tất cả các cạnh, S là tổng diện tích tất cả các mặt, d là độ dài đường chéo của hình hộp này. Chứng minh rằng nếu $a < b < c$ thì :

$$a) \ a < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} P - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} S} \right) ;$$

$$b) \ c > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} P + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} S} \right) .$$

CHỈ DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP

CHƯƠNG IV

$$2. \ \frac{\pi}{2} ; \ 1 \cdot \frac{\pi}{4} ; \ \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} ; \ \frac{\sqrt{2}}{4} \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} ; \ \frac{1}{3} \cdot \arccos \frac{4}{5} ; \\ \frac{2}{3} \cdot \arccos \frac{2}{5} ; \ \frac{4}{\sqrt{21}} .$$

$$3. \ \frac{R^2}{3} , \ AM = \frac{2R\sqrt{3}}{2} \text{ (có hai điểm M như vậy).}$$

$$4. \ b) \ \frac{2a^3\sqrt{2}}{27} , \ P \text{ cách đáy } ABCD \text{ một khoảng } \frac{a\sqrt{2}}{6} .$$

$$\text{Chỉ dẫn : Đặt } SA' = x. \text{ Tính được } v = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2(a - x).$$

5. b) $\frac{1}{6} R^2 h$; c) $\frac{R^3}{6}$. Đạt được khi MAB là tam giác vuông cân (có 2 điểm M như vậy) và $NM = R$ (với mỗi điểm M sẽ có hai điểm N).

6. a) Nửa đường tròn có tâm là điểm giữa I của SA, bán kính $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nằm trên mặt phẳng trung trực β của SA, giới hạn bởi đường kính B_1B_2 nằm trên giao tuyến m của α, β . (B_1 là giao điểm của BS kéo dài và m).

b) Nửa đường tròn đường kính SI nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

c) Đoạn B_1B_2 ; $V_{\max} = \frac{a^3}{8}$.

d) Tam giác ABC chỉ có thể vuông tại C. Khi đó $v = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

7. a) Đường tròn đường kính AO nằm trên mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng của hình vuông (O là tâm hình vuông).

$$V_{\max} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

b) Đường tròn đường kính AB.

c) Chỉ dẫn : AM là đường cao của tam giác vuông DAM'.

d) M'N' là giao tuyến của mặt (MCD) với P.

e) Chỉ dẫn : Xét 2 tam giác vuông M'BD và N'BN. Dùng các kết quả b), d).

8. a) $V = \frac{1}{6} a^2(x + y)$. b) $xy = \frac{1}{2} a^2$. c) $V_{\min} = \frac{1}{6} a^3\sqrt{2}$
 $\left(x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. d) H là điểm giữa AC. $HK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Quỹ tích K là nửa đường tròn đường kính BD thuộc mặt phẳng (Bm, Dn) trừ hai điểm B, D.

9. a) Lấy điểm giữa I của BC. Quỹ tích H là đường tròn đường kính IO của mặt phẳng (I, m) ; trừ hai điểm I, O.

c) $xy = \frac{a^2}{2}$. Chỉ dẫn : O là trực tâm tam giác MNI.

$$V_{\min} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12} \left(x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

10. a) $\frac{R}{2} \leq x \leq 2R$.

c) 1/4 đường tròn tâm I, bán kính $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ của mặt phẳng vuông góc với P theo giao tuyến ID.

d) Tam giác AEM vuông tại E có đường cao EK, nên

$$y = KE^2 = KA \cdot KM.$$

$$e) V = \frac{R^2}{6} \sqrt{2(2R - x)(2x - R)}, \quad V_{\max} = \frac{R^3}{4}.$$

$$11. a) V = \frac{a}{3} (a^2 - xy). \quad b) a(x + y) + xy = a^2.$$

$$c) \text{ Từ a) và b) suy ra } V = \frac{a^2}{3} (x + y).$$

Đặt $x + y = t \Rightarrow$ suy ra $xy = a^2 - at \Rightarrow t$ làm cho tam thức $f(z) = z^2 - tz + a^2 - at$ có hai nghiệm nằm trong đoạn $[0, a] \Rightarrow 2a(\sqrt{2} - 1) \leq t \leq a$.

$$V_{\min} = \frac{2a^3}{3} (\sqrt{2} - 1), \text{ đạt được khi } x = y = (a\sqrt{2} - 1).$$

$$V_{\max} = \frac{a^3}{3} \text{ đạt được khi } x = 0, y = a \text{ (M} \equiv B, N \equiv C) \text{ hoặc } x = a, y = 0 \text{ (M} \equiv C, N \equiv O).$$

$$12. a) xy = \frac{a^2}{2}, V = \frac{a^3}{12}; \quad b) \text{ Chỉ dẫn : } HM^2 - HN^2 = x^2 - y^2.$$

Quỹ tích H là nửa đường tròn đường kính AB nằm trên mặt phân giác α của nhị diện tạo hai nửa mặt phẳng (A, Bn) và (B, Am).

$$c) g(MN, \alpha) = \frac{\pi}{4}.$$

$$13. a) V = \frac{1}{12} \sqrt{2(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}.$$

b) Tâm I của mặt cầu là giao điểm của ba đường thẳng nối điểm giữa các cặp cạnh đối diện của tứ diện. Bán kính

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

c) Chỉ dẫn : Xét các hình bình hành có đỉnh là điểm giữa hai cặp cạnh đối diện của tứ diện, $\cos \alpha = \frac{|b^2 - c^2|}{a^2}$,

$$\cos \beta = \frac{|c^2 - a^2|}{b^2}, \cos \gamma = \frac{|a^2 - b^2|}{c^2}. \text{ Giả sử } a \geq b \geq c.$$

$$a^2 \cos \alpha + c^2 \cos \gamma = a^2 - c^2 = b^2 \cos \beta.$$

d) Chỉ dẫn : Lấy điểm H, K của AB, CD. HK là đường vuông góc chung của AB, CD. Gọi hình chiếu của M trên HK là M_1 . Hãy chứng minh $MA + MB + MC + MD \geq M_1A + M_1B + M_1C + M_1D$. Giá trị nhỏ nhất đạt được tại tâm I (điểm giữa HK) và bằng $\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

14. Chỉ dẫn : Hình chiếu của hình hộp có diện tích gấp đôi diện tích hình chiếu một mặt chéo tam giác của nó. Do đó, cần phải đặt hình hộp sao cho một trong các mặt chéo tam giác song song với mặt phẳng chiếu

$$S_{\max} = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

15. a) DF cắt D_1C_1 tại F_1 . Gọi trọng tâm hai tam giác ADE và $A_1E_1F_1$ là G_1, G_2 . Quỹ tích là đoạn G_1G_2 .

$$b) \quad s(x) = \frac{1}{2} (4x^2 - 3ax + a^2)$$

$$s_{\min} = s\left(\frac{3a}{8}\right) = \frac{7a^2}{32}.$$

Chỉ dẫn : Chiếu tam giác MNP xuống mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$.

16. Chỉ dẫn : Gọi tứ diện là ABCD. Giả sử :

$$DA^2 + BC^2 \geq DB^2 + CA^2 \geq DC^2 + AB^2.$$

Lấy HK là đường vuông góc chung của DA và BC.

Mặt phẳng qua BC, // DA và mặt phẳng qua HK, $\perp$ BC là hai mặt phẳng cần tìm.

17. Chỉ dẫn : Dùng kết quả bài tập 3a chương I và kết quả 1§3 chương II.

18. Chỉ dẫn : Dựng hình chữ nhật ACBE. Sử dụng kết quả : bán kính mặt cầu không nhỏ hơn bán kính các đường tròn của nó.

19. Kí hiệu $x = AM$, $\alpha = \widehat{BAM}$. Cần tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x, \alpha) = \frac{x + AB}{\sqrt{x^2 + AB^2 - 2x \cdot AB \cos \alpha}}$.

Với mỗi giá trị x cố định, $f(x, \alpha)$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos \alpha$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó α sẽ là góc giữa BA và mặt phẳng P (bạn đọc tự chứng minh kết quả này). Với giá trị α đó f đạt giá trị lớn nhất đồng thời với f^2 . Coi đây là hàm của x . Lấy đạo hàm ta được

$$\begin{aligned} (f^2)' &= \left[\frac{(x + AB)^2}{(x^2 + AB^2 - 2x \cdot AB \cos \alpha)} \right]' = \\ &= \frac{2(1 + \cos \alpha) \cdot AB(x^2 - AB^2)}{(x^2 + AB^2 - 2xAB \cos \alpha)^2} \end{aligned}$$

Do đó $(f^2)' = 0$ khi $x = AB$.

Vậy suy ra cách dựng điểm M.

Hình chiếu của tia AB trên P cắt đường tròn tâm A bán kính AB tại điểm M cần tìm. Khi này :

$$f_{\max} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} ; \text{ trong đó } \alpha = g(AB, P).$$

20. Cách 1. Biểu diễn d, P, S qua a, b, c. Sau một vài biến đổi, các bất đẳng thức cần chứng minh sẽ tương đương với các bất đẳng thức hiển nhiên đúng $(a - b)(a - c) > 0$ và $(c - a)(c - b) > 0$.

Cách 2. Hãy xét tam thức bậc hai có hai nghiệm là

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} P \pm \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} S} \right).$$

CHƯƠNG V

PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH HÌNH CẦU NỘI TIẾP VÀ NGOẠI TIẾP KHỐI ĐA DIỆN

§1. Khái niệm chung

I. KHỐI ĐA DIỆN NỘI TIẾP^{*)}

a) *Định nghĩa.* Giả sử T là một khối đa diện đã cho. Nếu có một hình cầu (O) chứa đa diện T sao cho tất cả các đỉnh của T đều nằm trên mặt cầu đó, thì T được gọi là khối đa diện nội tiếp, còn hình cầu (O) được gọi là hình cầu ngoại tiếp khối đa diện T (mặt cầu này được gọi là mặt cầu ngoại tiếp đa diện T).

b) *Tính chất.*

* Tâm O của hình cầu (O) cách đều các đỉnh của đa diện T , vì vậy các mặt phẳng trung trực của các cạnh của T đồng quy tại tâm của hình cầu đó.

* Tất cả các mặt của đa diện T đều là các đa giác nội tiếp.

Như vậy :

Nếu khối đa diện T có một mặt là đa giác không nội tiếp được thì T không là đa diện nội tiếp.

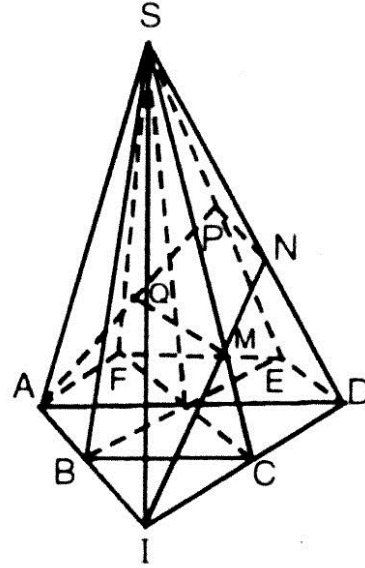
* Tính chất sau đây thường hay được sử dụng để nhận biết và chứng minh một đa diện là đa diện nội tiếp.

Nếu khối đa diện T có một cạnh hoặc một đường chéo sao cho các đỉnh còn lại của T đều nhìn cạnh, hoặc đường chéo đó dưới một góc vuông, thì T là đa diện nội tiếp trong hình cầu có đường kính là cạnh hoặc đường chéo nói trên.

^{*)} Trong chương này chúng ta chỉ xét đa diện nội và ngoại tiếp hình cầu.

Ví dụ 1. Cho hình chóp lục giác đều $SABCDEF$. N là một điểm bất kỳ trên SD , mặt phẳng qua AB và N cắt SC tại M , SE tại P và SF tại Q . Chứng minh rằng khối đa diện $ABCEFQPMN$ không nội tiếp được trong hình cầu.

Giải : I là giao điểm của AB và CD . Khi đó $I \in (ABMNPQ)$ và $I \in (SDC)$ nên $I \in MN$, tức là MN cắt CD tại I . Mặt khác $\triangle SCD$ cân nên $\widehat{SCD} = \widehat{SDC}$, tứ giác $CDNM$ không là tứ giác nội tiếp (vì nếu nó là tứ giác nội tiếp thì $\widehat{CMN} = \widehat{DNM}$ và $IN \parallel ID$ vô lý!). Như vậy đa diện $ABCEFQPMN$ không là đa diện nội tiếp (hình 122).



Hình 122

Ví dụ 2. Với giả thiết của ví dụ 1, hãy chứng minh rằng hình chóp $SABMNPQ$ không nội tiếp được trong hình cầu.

Giải : Giả sử $SABMNPQ$ là đa diện nội tiếp, khi đó $ABMNPQ$ sẽ là đa giác nội tiếp. Đối với các cát tuyến IAB và IMN của hình tròn ngoại tiếp đa giác đáy $ABMNPQ$ ta có

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{IM} \cdot \overline{IN}, \quad (1)$$

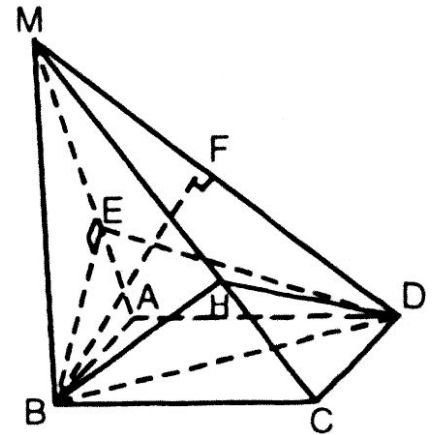
trong đó $\overline{IA}, \overline{IB}, \dots$ là các độ dài đại số của các đoạn $IA, IB, \dots$. Vì $ABCDEF$ là lục giác đều nên ta có

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{IC} \cdot \overline{ID}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$ và do đó $MNCD$ là tứ giác nội tiếp. Điều này mâu thuẫn với kết luận trong chứng minh ở ví dụ 1. Như vậy đa diện $SABMNPQ$ không nội tiếp được trong hình cầu.

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên đường vuông góc tại B với (ABCD) ta lấy một điểm M. Gọi E, F, H lần lượt là hình chiếu của B lên MA, MD, MC. Chứng minh rằng bảy điểm A, B, C, D, E, F, H cùng nằm trên một mặt cầu. Chứng tỏ rằng khi M thay đổi, thì mặt cầu này là cố định.

Giải : (hình 123). Ta cần chứng minh ABCDEFH là đa diện nội tiếp. Trước hết ta thấy các đỉnh A, F, C nhìn BD dưới một góc vuông. Mặt khác, dễ thấy $DA \perp (MAB)$, nên $DA \perp BE$, và theo giả thiết $BE \perp MA$, nên suy ra $BE \perp (MAD)$ do đó $BE \perp ED$, tức là E nhìn BD dưới một góc vuông. Tương tự $\widehat{BHD} = 1v$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

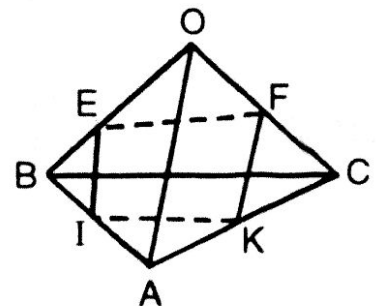


Hình 123

Như vậy hình cầu ngoại tiếp đa diện sẽ có đường kính là BD và hiển nhiên nó không phụ thuộc vào vị trí của M.

Ví dụ 4. Tứ diện OABC có $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$. Giả sử các đỉnh O, A và bốn trung điểm I, K, E, F của bốn cạnh AB, AC, OB, OC nằm trên một mặt cầu. Xác định tâm mặt cầu đi qua sáu điểm đó. Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Giải : (hình 124). Vì sáu điểm O, A, I, K, E, F nằm trên mặt cầu, nên đa diện OAIKEF nội tiếp trong hình cầu giới hạn bởi mặt cầu đó. Vì vậy OAIE là tứ giác nội tiếp. Mặt khác $IE \parallel AO$ nên OAIE là hình thang cân, do đó $\widehat{AOB} = \widehat{OAB} = 60^\circ$. Như vậy $\triangle OAB$ đều. Từ đó suy ra $OI \perp AB$, $AE \perp OB$. Tương tự $AF \perp OC$, $OK \perp AC$. Tóm lại I, K, E, F đều



Hình 124

nhìn OA dưới một góc vuông, do đó hình cầu ngoại tiếp đa diện OAIEFK có tâm là điểm giữa cạnh OA.

Ta có $\triangle OBC = \triangle ABC$ vì có cạnh BC chung, $OB = AB$, $OC = AC$ (các tam giác OAB, OAC là đều theo chứng minh trên), nên $\widehat{BOC} = \widehat{BAC} = 90^\circ$. Vậy hình cầu ngoại tiếp OABC có tâm là trung điểm của đoạn BC.

2. KHỐI DA DIỆN NGOẠI TIẾP

a) *Định nghĩa.* Đa diện T được gọi là đa diện ngoại tiếp nếu có một hình cầu (O) ở bên trong T sao cho nó tiếp xúc với tất cả các mặt của T. Khi đó hình cầu (O) được gọi là hình cầu nội tiếp trong đa diện T, và mặt của hình cầu này được gọi là mặt cầu nội tiếp trong đa diện T.

b) *Tính chất.*

* Nếu T là đa diện ngoại tiếp thì tâm hình cầu nội tiếp nó cách đều tất cả các mặt của T. Vì vậy tâm hình cầu nội tiếp đa diện nằm tại giao điểm của các mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện của các cặp mặt của khối đa diện T.

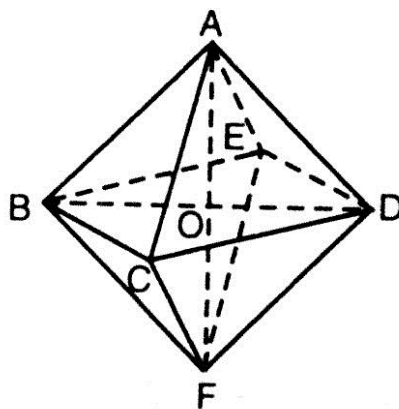
* Nếu T là đa diện ngoại tiếp thì ta có

$$V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r, \quad (*)$$

trong đó V là thể tích của T, S_{tp} là diện tích toàn phần của T, r là bán kính hình cầu nội tiếp.

Ví dụ 5. Cho một hình bát diện đều cạnh a. Hãy tìm tâm và tính bán kính mặt cầu nội tiếp trong bát diện đã cho.

Giải : Dễ thấy các đường chéo của bát diện gặp nhau tại một điểm và điểm đó chính là tâm của hình



Hình 125

cầu nội tiếp. Ta gọi điểm đó là O (hình 125). Để tính bán kính của nó ta dùng công thức (*). Trước hết ta có

$$S_{tp} = 8 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3} ;$$

$$\begin{aligned} V &= 2V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{ECDB} \cdot OA = \\ &= \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} . \end{aligned}$$

Như vậy

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} .$$

§2. Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp và tứ diện

1. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI

Nếu một hình chóp có đáy nội tiếp trong hình tròn, thì hình chóp đó nội tiếp trong hình cầu.

2. CÁC BƯỚC TÌM HÌNH CẦU NGOẠI TIẾP

- * *Tìm tâm hình tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp.*
- * *Dựng đường thẳng d vuông góc với đáy hình chóp và đi qua tâm hình tròn ngoại tiếp.*
- * *Dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên.*

Giao điểm của mặt phẳng trung trực và d là tâm mặt cầu cần tìm.

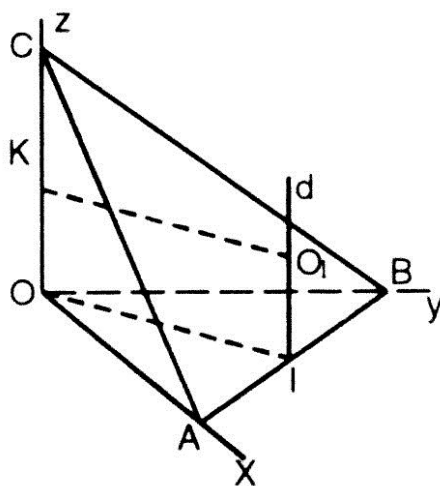
Chú ý : a) Nếu hình chóp là một tứ diện, có một mặt là tam giác có dạng đặc biệt : vuông, đều, cân thì nên chọn mặt đó làm đáy (trong trường hợp này ta dễ chỉ ra một cách cụ thể tâm đường tròn ngoại tiếp đáy).

b) Nếu hình chóp có một cạnh bên đồng phẳng với đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng đáy và đi qua tâm của hình tròn ngoại tiếp đa giác đáy, thì ta nên chọn cạnh bên đó, rồi vẽ đường trung trực của cạnh bên đó (trong mặt phẳng xác định này). Giao điểm của nó với d chính là tâm của hình cầu ngoại tiếp.

Ví dụ 1. Cho ba điểm A, B, C lần lượt nằm trên ba tia vuông góc từng cặp với nhau Ox, Oy, Oz . Hãy xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ và tính bán kính của mặt cầu đó theo $a = OA, b = OB, c = OC$.

Giải : (hình 126). Xét hình chóp có đỉnh C và đáy OAB . Gọi I và K lần lượt là điểm giữa của các cạnh AB và OC . Vì $\triangle OAB$ vuông tại O nên I là tâm của đường tròn ngoại tiếp của nó.

Dựng đường thẳng $d \perp (OAB)$ tại I , ta có $d \parallel OC$ (vì $d \perp (OAB)$, $OC \perp (OAB)$) nên d và OC đồng phẳng.



Hình 126

Vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là giao điểm O_1 của d và đường trung trực của đoạn OC trong mặt phẳng đó. Vì O_1K và OI cùng vuông góc với OC và đồng phẳng nên OKO_1I là hình chữ nhật.

Ta có

$$OO_1^2 = O_1I^2 + IO^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Vậy

$$R = \frac{1}{2} OO_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

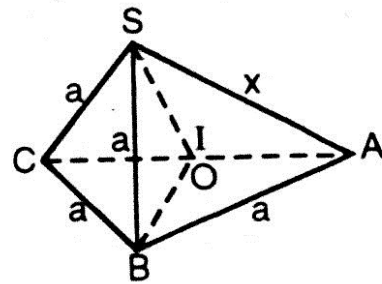
Ví dụ 2. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là nửa hình thoi với đường chéo lớn AC , cạnh $AB = a$, $(SAC) \perp (ABC)$ và $SB = SC = a$.

a) Chứng minh rằng ΔSAC vuông tại S.

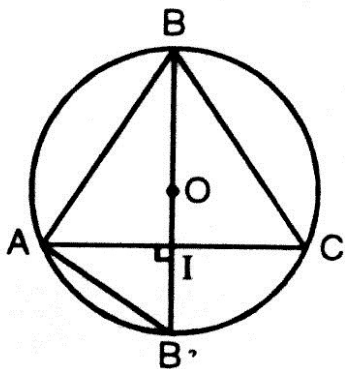
b) Tìm tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp biết $SA = x$.

Giải : a) Vì ΔBAC cân ($BA = BC$), nên nếu gọi I là trung điểm của AC, thì $BI \perp AC$. Mặt khác $(ABC) \perp (SAC)$, nên $BI \perp (SAC)$. Từ đó $BI \perp IS$. Các tam giác vuông CIB, SIB và AIB bằng nhau (vì $BC = SB = AB$ và BI chung), nên $CI = SI = IA$. Vậy ΔSAC vuông tại S.

b) Ta hãy quan sát hình chóp SABC với đỉnh B và đáy là tam giác vuông SAC. Theo a) I chính là tâm hình tròn ngoại tiếp tam giác đáy SAC, hơn nữa đường vuông góc với mặt phẳng đáy (SAC) là BI lại nằm trong mặt bên (ABC) (nó đồng phẳng với hai cạnh bên BA, BC), vì vậy tâm O của hình cầu ngoại tiếp trùng với tâm hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC (hình 127).



Hình 127



Hình 128

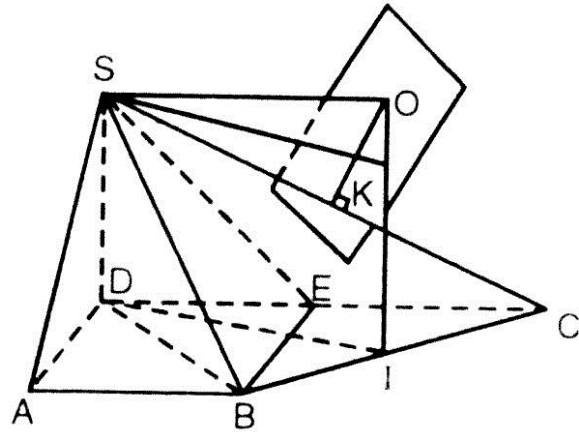
Kéo dài BI cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại B' (hình 128). Trong tam giác vuông ABB' ta có $AB^2 = BI \cdot BB'$. Trong tam giác vuông IAB ta có $BI^2 = AB^2 - AI^2$. Mà theo giả thiết $AI^2 = AC^2/4 = (x^2 + a^2)/4$. Vậy $BI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{4}$. Từ đó $R = BB'/2 = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$ (x phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < a\sqrt{3}$).

Ví dụ 3. Cho hình chóp SABCD, đáy là hình thang vuông tại A, ABCD có $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và

$SD = a$. Gọi E là trung điểm của CD, I là trung điểm của BC. Tính DI, xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp SBCE.

Giải : Để thấy rằng $\triangle DBC$ vuông cân tại B.

Để tính DI cần xét tam giác vuông BDI, có $BD = a\sqrt{2}$,
 $BI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, nên $DI = a\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Hình 129

Hình chóp SBCE có đáy là tam giác vuông BCE (vuông tại E), do đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCE$. Giao điểm O của mặt phẳng trung trực cạnh SC là đường vuông góc với (ABCD) đi qua I, là tâm hình cầu cần tìm (hình 129). Tứ giác SDIO là hình thang vuông tại D. Kẻ $SK \parallel DI$, ta có (trong tam giác vuông SOK) :

$$SO^2 = SK^2 + OK^2 = DI^2 + (OI - SD)^2 = \frac{5a^2}{2} + (OI - a)^2$$

và (trong tam giác vuông OIC) : $OC^2 = OI^2 + IC^2 = OI^2 + \frac{a^2}{2}$.

Vì $OC = SO$ nên ta có :

$$OI^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{2} + (OI - a)^2 \text{ hay } OI = \frac{3a}{2} \text{ và } OC = \frac{a\sqrt{11}}{2}.$$

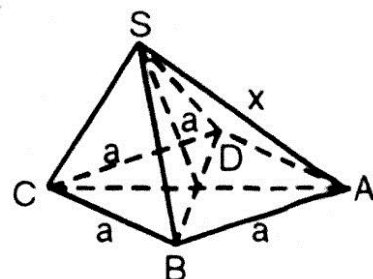
Vậy bán kính hình cầu là $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp SABCD có $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại bằng a. Với giá trị nào của x hình chóp SABCD có hình cầu ngoại tiếp ? Xác định tâm và bán kính của nó.

Giải : Điều kiện cần và đủ để SABCD là đa diện nội tiếp và ABCD là tứ giác nội tiếp. Theo giả thiết ABCD là hình thoi nên nó phải là hình vuông.

Tương tự như cách chứng minh ví dụ 2 trên đây ta thấy ΔSAC vuông tại S, nên ta có $AC^2 = a^2 + x^2$. Vì $AC = a\sqrt{2}$, nên $2a^2 = a^2 + x^2$, hay $x = a$. Với $x = a$ thì hình chóp SABCD trở thành hình chóp tứ giác đều. Để thấy hình chóp này có tâm hình cầu ngoại tiếp là

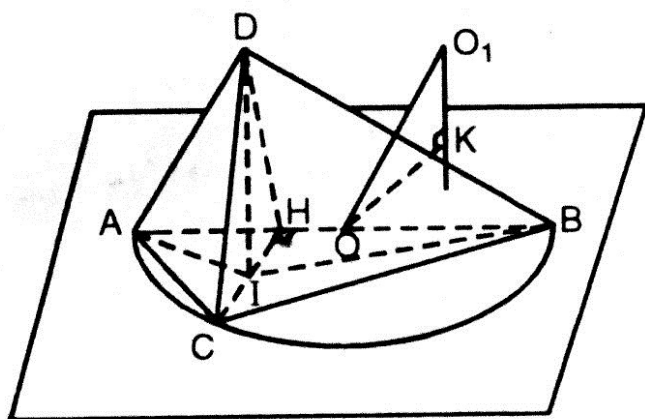
tâm O của đường tròn ngoại tiếp hình vuông đáy ABCD với bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (hình 130).



Hình 130

Ví dụ 5. Trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ ta chọn một điểm C. Gọi H là hình chiếu của C trên AB, I là trung điểm của CH. Trên nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của nửa vòng tròn tại I ta chọn một điểm D sao cho $\widehat{ADB} = 1v$.

a) Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện AIBD. Đặt $HA = x$. Tính bán kính hình cầu đó.



Hình 131

b) Chứng minh rằng khi C di động trên nửa đường thẳng thì tâm hình cầu chạy trên một đường thẳng cố định.

Giải : a) Coi tứ diện ABCD là hình chóp đỉnh C đáy là tam giác vuông ADB. Tâm O của đường tròn cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp

tam giác vuông ABD, tức là $OD = R$ (hình 131).

Qua O dựng đường vuông góc Ox với (ABD). Khi đó giao điểm của Ox và mặt phẳng trung trực của đoạn ID là tâm hình cầu cần tìm. Gọi tâm đó là O_1 . Trong tam giác vuông DO_1O (vuông tại O) ta có $O_1D^2 = OO_1^2 + OD^2$.

Để thấy $\triangle CAB = \triangle DAB$, và vì vậy tam giác vuông (tại I) IDH có $IH = DH/2$. Do đó $\widehat{IHD} = 60^\circ$, tức là nhị diện tạo bởi (ABD) và (ABC) bằng 60° . Từ đó góc giữa OO_1 và (ABC) bằng 30° (ta chọn góc nhỏ). Mặt khác, vì mặt phẳng trung trực của DI song song với (ABC), nên khoảng cách O_1K từ O_1 tới (ABC) bằng $\frac{DI}{2}$ và $O_1K = \frac{OO_1}{2}$ (trong tam giác OC_1K , vuông tại K, với góc $\widehat{KOO_1} = 30^\circ$). Như vậy $OO_1 = DI$, và kết hợp lại ta có

$$O_1D^2 = DI^2 + OD^2 = \frac{3HC^2}{4} + R^2 = \frac{3}{4} (2R - x)x + R^2.$$

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp là

$$O_1D = \frac{1}{2} \sqrt{3(2R - x)x + 4R^2}.$$

b) Trục OO_1 cố định vì (ABD) và AB cố định.

§3. Phương pháp tìm tâm hình cầu ngoại tiếp hình lăng trụ và hình chóp cụt

1. ĐỐI VỚI HÌNH LĂNG TRỤ

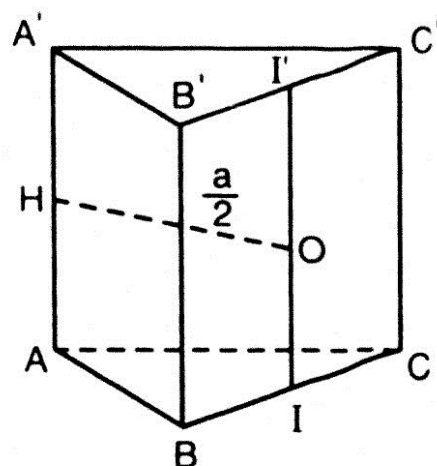
Đối với các lăng trụ nói chung, không có một dấu hiệu chung nào để nhận biết chúng có là đa diện nội tiếp hay không mà phải căn cứ vào từng trường hợp cụ thể.

Tuy nhiên đối với lăng trụ đứng có tính chất : *Nếu lăng trụ đứng có đáy là đa giác nội tiếp, thì nó là đa diện nội tiếp. Tâm của hình cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng là điểm giữa đoạn thẳng nối tâm các đường tròn ngoại tiếp hai đáy.*

Ví dụ 1. Đáy của lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ là tam giác vuông ABC (vuông tại A).

a) Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp lăng trụ.

b) Giả sử các đỉnh B, C, B', C' di động lần lượt trên các cạnh $AB, AC, A'B', A'C'$ sao cho $(BCC'B') \parallel AA'$ và $BC = a$ (a là một độ dài cho trước). Chứng tỏ rằng tâm hình cầu ngoại tiếp nằm trên một đường tròn cố định.



Hình 132

Giải : a) Ta thấy ngay tâm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ là điểm giữa I của BC và điểm giữa I' của $B'C'$. Như vậy điểm giữa O của II' (hình 132) là tâm của hình cầu ngoại tiếp.

b) Khi $(BCC'B')$ thay đổi thì điểm giữa H của AA' vẫn cố định, hơn nữa $OH = AI = \frac{a}{2}$ không đổi. Như vậy O nằm trên mặt phẳng trung trực của AA' , và cách điểm giữa H cố định của AA' , tức là nằm trên đường tròn cố định tâm H bán kính $\frac{a}{2}$ (chính xác hơn nó nằm trên $1/4$ đường tròn trên).

2. ĐỐI VỚI HÌNH CHÓP CỤT. Tương tự như đối với hình lăng trụ, không phải hình chóp cắt bất kỳ nào cũng là đa diện nội tiếp. Tuy nhiên ta có

Nếu hai đáy của hình chóp cắt là đa giác nội tiếp và đường thẳng nối tâm các đường tròn ngoại tiếp hai đáy vuông góc với các mặt phẳng đáy thì hình chóp cắt đó nội tiếp được trong hình cầu.

Để tìm tâm hình cầu ngoại tiếp ta làm như sau :

* Tìm tâm các đường tròn ngoại tiếp hai đáy.

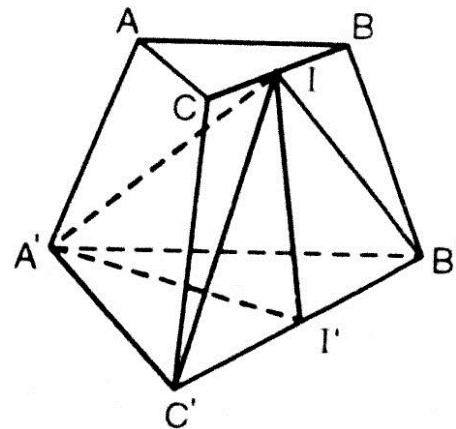
* Dựng mặt phẳng trung trực của một cạnh bên bất kỳ. Giao điểm của mặt phẳng đó với đường thẳng nối các tâm của các đường tròn ngoại tiếp hai đáy là tâm mặt cầu cần tìm.

Cũng như đối với hình chóp ta lưu ý rằng nếu đường nối tâm và một cạnh bên nào đó đồng phẳng thì ta chỉ cần vẽ đường trung trực của cạnh bên đó ở trong mặt phẳng này và giao điểm của đường trung trực đó với đường nối tâm chính là tâm hình cầu ngoại tiếp.

Ví dụ 2. Đáy của một hình chóp cắt là các tam giác vuông. Biết rằng khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp đáy nhỏ đến các đỉnh của đáy lớn bằng nhau.

a) Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp cắt.

b) Tính bán kính của nó. Biết rằng khoảng cách giữa hai đáy là h cạnh huyền của các tam giác đáy là a, b .



Hình 133

Giải : (Hình 133). a) Ta thấy điểm giữa I, I' của các cạnh huyền BC và $B'C'$ là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông đáy ABC và $A'B'C'$. Vì $IA' = IB' = IC'$ và $I'A' = I'B' = I'C'$ nên $II' \perp (A'B'C')$.

Vì II' nằm trong $(BCC'B')$ nên theo nhận xét trên tâm O của hình cầu ngoại tiếp chính là giao điểm của đường trung trực của BB' trong $(BCC'B')$ với II' .

b) Ta có $BC = a, B'C' = b$; đặt $OI = x$, khi đó

$$II' = h \text{ và } OI' = h - x.$$

Xét tam giác vuông OBI ta có :

$$OB^2 = x^2 + \frac{a^2}{4} \quad (1)$$

Xét tam giác vuông OB'I' ta có :

$$OB^2 = (h - x)^2 + \frac{b^2}{4}, \quad (2)$$

hay

$$\frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{b^2}{4} - 2hx, \text{ từ đó}$$

$$x = \frac{h}{2} + \frac{b^2 - a^2}{8h}.$$

Thay giá trị đó của x vào (1) ta được bán kính cần tính :

$$R = \frac{\sqrt{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16h^4 + 8a^2h^2 + 8b^2h^2}}{8h}.$$

§4 Phương pháp tìm tâm hình cầu nội tiếp trong hình chóp hoặc tứ diện

Bạn đọc chú ý là trong mục này chúng ta chỉ đề cập đến khối hình chóp và tứ diện. Đối với chúng có thể có một vài phương pháp tìm tâm hình cầu sau đây :

1. PHƯƠNG PHÁP ĐIỂM CÁCH ĐỀU.

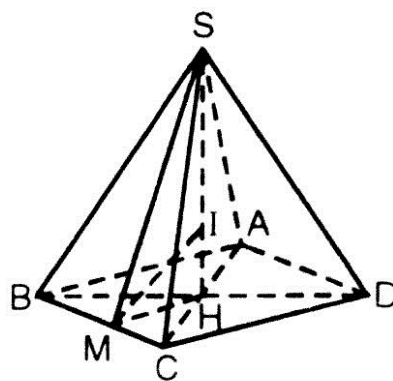
Phương pháp này dựa trên điều kiện tồn tại của hình cầu nội tiếp trong hình chóp, mà ta dễ dàng nghiệm lại được :

Nếu trên đáy của một hình chóp tồn tại một điểm cách đều tất cả các mặt xung quanh của hình chóp thì hình chóp đó có một hình cầu nội tiếp.

Ví dụ 1. Cho hình chóp SABCD đáy là hình thoi ABCD và $AC = a$, $BD = b$, chân đường cao hạ từ đỉnh S trùng với giao điểm các đường chéo đáy.

- a) Chứng minh rằng có một hình cầu nội tiếp trong hình chóp.
 b) Tìm tâm và bán kính hình cầu nội tiếp biết rằng đường cao hình chóp bằng h .

Giải : (hình 134). a) Gọi H là giao điểm các đường chéo đáy. Ta chứng minh rằng H cách đều các mặt xung quanh. Thật vậy xét bốn hình chóp $SAHB$, $SBHC$, $SCHD$ và $SDHA$. Bốn hình chóp này có thể tích bằng nhau, ngoài ra bốn mặt bên $SAB = SBC = SCD = SDA$, nên khoảng cách từ H đến bốn mặt bằng nhau.



Hình 134

b) Dựng mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh BC . Nó cắt SH tại I . Đó là tâm hình cầu cần tìm.

Việc tính bán kính hình cầu có thể suy từ công thức (*). Tuy nhiên có thể giải trực tiếp bằng phương pháp dựng.

Hạ $HM \perp BC \Rightarrow SM \perp BC$; $\widehat{SMH}$ là góc phẳng nhị diện cạnh BC . Mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh BC cắt (SMH) theo giao tuyến MI , là phân giác của góc đó. Áp dụng tính chất của đường phân giác trong tam giác ta có :

$$\frac{SI}{IH} = \frac{SM}{MH} ; \frac{SI}{IH} + 1 = \frac{SM}{MH} + 1,$$

$$\frac{SH}{IH} = \frac{SM}{MH} + 1, \quad (1) \text{ trong đó } IH = r \text{ và } SH = h.$$

Trong tam giác vuông HBC ta có $HM \cdot BC = HB \cdot HC$,

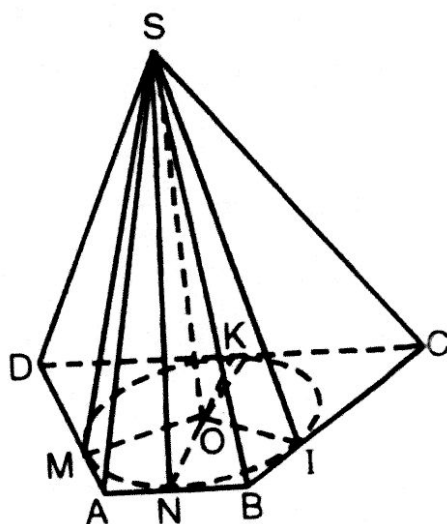
hay
$$HM = \frac{HB \cdot HC}{BC}$$

Còn $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2}$. Thay kết quả vào hệ thức (1) ta được r .

Ví dụ 2. Hình chóp SABCD đáy là hình thang cân ABCD có $CD = 4AB$. Đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang có bán kính a. Ngoài ra $SO \perp (ABCD)$ và $SO = 2a$.

- Chứng minh rằng O cách đều các mặt bên hình chóp.
- Tìm tâm và tính bán kính hình cầu nội tiếp.

Giải : (hình 135). a) Gọi M, N, I, K lần lượt là tiếp điểm của O với các cạnh DA, AB, BC và CD. Nhận xét rằng bốn đường cao của bốn tam giác vuông SOM, SON, SOI và SOK hạ từ O đến các cạnh huyền của các tam giác đó là khoảng cách từ O đến các mặt bên của hình chóp đó. Mặt khác ta có :



Hình 135

$$\Delta SOM = \Delta SON = \Delta SOI = \Delta SOK.$$

Điều đó chứng tỏ rằng O cách đều bốn mặt xung quanh.

b) Xét góc phẳng $\widehat{SMO}$, dựng phân giác của góc này. Giao điểm của phân giác đó với SO là tâm mặt cầu cần tìm. Việc tính bán kính xin dành cho bạn đọc.

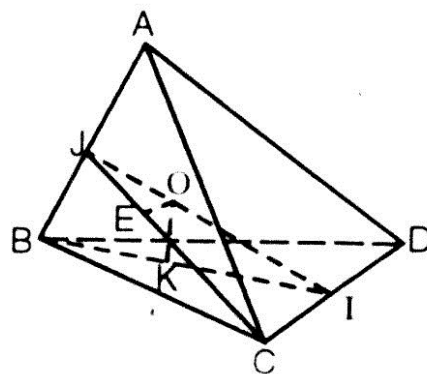
Từ hai ví dụ trên ta rút ra quy tắc tìm tâm như sau.

Sau khi xác định được điểm cách đều trên đáy (điểm này đã được gợi ý hoặc suy từ tính chất đặc biệt của đáy), ta nối đỉnh hình chóp với nó bằng một đoạn thẳng. Dựng mặt phẳng phân giác của một góc nhị diện nào đó ở đáy. Giao điểm của mặt phân giác với đường thẳng trên là tâm hình cầu nội tiếp cần tìm.

2. *Phương pháp hai mặt phẳng phân giác.* Phương pháp này dựa trên tính chất cách đều các mặt đa diện của tâm mặt cầu và do đó thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng phân giác của hai góc nhị diện.

Ví dụ 3. Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 6\text{cm}$. Các cạnh còn lại bằng $\sqrt{34}\text{cm}$. Tìm tâm và bán kính hình cầu nội tiếp.

Giải : (hình 136). Gọi I, J là trung điểm của CD và AB, ta thấy rằng IJ là phân giác của các góc $\widehat{AIB}$ và $\widehat{CJD}$.



Hình 136

Mặt khác các góc đó là góc phẳng nhị diện cạnh AB, CD, nên IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng phân giác. Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp, thì $O \in IJ$. Dễ thấy rằng O là trung điểm của IJ. Thật vậy, hạ $OK \perp BI$, $OE \perp JC$. Ta có hai tam giác vuông OKI và OJE bằng nhau (vì $\widehat{OIK} = \widehat{OJE}$ và $OK = OE = r$), từ đó $OI = OJ$. Dễ thấy :

$$\Delta OIK \sim \Delta BIJ \text{ suy ra } \frac{OK}{JB} = \frac{OI}{BI}, \text{ trong đó } JB = 3\text{cm},$$

$$IJ = \sqrt{34 - 9 - 9} \text{ cm} = \sqrt{16} \text{ cm} = 4\text{cm},$$

$$BI = \sqrt{34 - 9} \text{ cm} = \sqrt{25} \text{ cm} = 5\text{cm}.$$

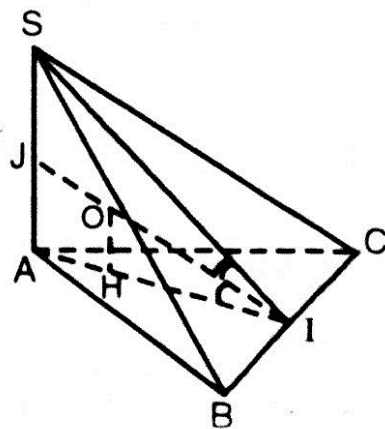
$$\text{Vậy } r = OK = \frac{OI \cdot JB}{BI} = \frac{2 \cdot 3 \text{ cm}}{5} = 1,2 \text{ cm}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp SABC có $AB = AC = 15$, $BC = 18$, cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = 16$. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu nội tiếp.

Giải : (hình 137). Gọi I là trung điểm của BC, vì ΔSBC cân ($SB = SC$), nên $SI \perp BC$. Vì thế $\widehat{SIA}$ là góc phẳng nhị diện

cạnh BC. $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện cạnh SA, (SIA) là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh SA. Kẻ phân giác của $\widehat{SIA}$ cắt SA ở J, khi đó mặt phẳng (BJC) là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh BC. Gọi O là tâm hình cầu nội tiếp, khi đó $O \in IJ$. Gọi H là hình chiếu của O lên (ABC). Vị trí của O được xác định từ tỷ

$$\text{số : } \frac{OI}{IJ} = \frac{OH}{JA}.$$



Hình 137

Vì $\triangle SIA$ có IJ là phân giác nên $\frac{IS}{IA} = \frac{JS}{JA}$. Vậy

$$\frac{SA}{JS} = \frac{IS}{IA} + 1. \text{ Mặt khác } OH = \frac{3V}{S_{tp}}, \text{ trong đó}$$

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABC)$$

$$\text{và } S_{tp} = dt(ABC) + dt(SBC) + 2dt(SAB).$$

Ta áp dụng công thức $r = \frac{3V}{S_{tp}}$ để tính r. Ta có :

$$dt(ABC) = \sqrt{24 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 6} = 9 \cdot 12 = 108 \text{ (theo công thức Hê-rông) ;}$$

$$V = \frac{1}{3} SA \cdot dt(ABC) = \frac{1}{3} 16 \cdot 108 = 16 \cdot 36 = 576 ;$$

$$dt(SAB) + dt(SAC) = SA \cdot AB = 16 \cdot 15 = 240 ;$$

$$dt(ABC) = \frac{1}{2} AI \cdot BC = 108. \text{ Vậy } AI = \frac{216}{18} = 12 ;$$

$$SI = \sqrt{SA^2 + IA^2} = \sqrt{250 + 144} = 20 ;$$

$$dt(SBC) = \frac{1}{2} SI \cdot BC = \frac{20 \cdot 18}{2} = 180 ;$$

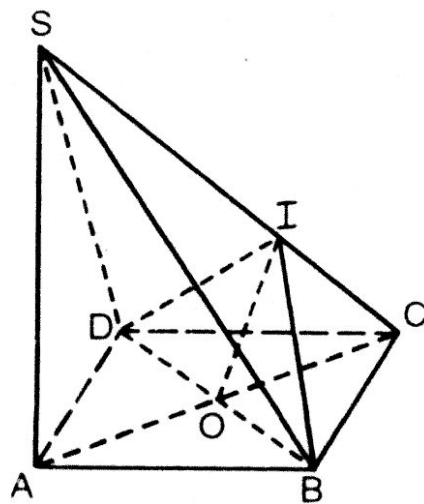
$$S_{tp} = 108 + 240 + 180 = 528 ; \text{ từ đó}$$

$$r = \frac{3 \cdot 576}{528} = 1,09 \cdot 3 = 3,27.$$

Từ đó suy ra cách vẽ tâm O : trong mặt phẳng SAI lấy một đoạn $SA = r = 3,27$ kẻ đường song song với AI. Đường này cắt SI tại O. Điểm O là tâm hình cầu nội tiếp cần tìm.

Ví dụ 5. Cho hình thoi ABCD. Trên nửa đường thẳng vuông góc tại A với mặt phẳng (ABCD) ta chọn điểm S và xét hình chóp SABCD. Chứng minh rằng hình chóp SABCD có hình cầu nội tiếp và tâm của hình cầu đó di động trên nửa đường thẳng cố định khi S di động trên nửa đường thẳng vuông góc tại A với mặt phẳng (ABCD).

Giải : (hình 138). Xét hình chóp SABCD. Dễ thấy rằng góc $\widehat{BAD}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SA, AC là phân giác của $\widehat{BAD}$ nên (SAC) là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh SA. Từ giao điểm O của AC và BD ta vẽ $OI \perp SC$, khi đó $\widehat{BID}$ là góc phẳng của nhị diện cạnh SC. $\triangle BID$ cân, vì OI vừa là trung tuyến vừa là đường cao của tam giác. Vậy OI là phân giác của góc $\widehat{BID}$. Và (SAC) cũng là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh SC. Nếu gọi (Δ) là giao tuyến của mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh (SB) với mặt (SAC), thì mọi điểm thuộc (Δ) cách đều bốn mặt bên của hình chóp. Do đó hình chóp này có một hình cầu nội tiếp.



Hình 138

Gọi (Δ') là giao tuyến của mặt phẳng phân giác nhị diện vuông cạnh AB với (SAC). Tâm hình cầu nội tiếp thuộc (Δ') .

(Δ') là nửa đường thẳng cố định, vì góc nhị diện cạnh AB và mặt phẳng (SAC) cố định.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

1. Trong một mặt phẳng P cho đường tròn đường kính AC. Trên đường vuông góc với P tại A ta chọn điểm S ; trên đường kính AC lấy điểm H vẽ dây BD qua H. Xét hình chóp SABCD. Mặt phẳng qua A, vuông góc với cạnh SC cắt SC tại C', SB tại B' và SD tại D'.

a) Giả sử BD quay quanh H. Chứng minh rằng đa diện ABCDB'C'D' nội tiếp được trong một hình cầu cố định. Dây B'D' đi qua một điểm cố định.

b) Giả sử BD cố định, không trùng với AC, còn S di động trên đường vuông góc với P tại A. Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp ABCD'C'B' cũng cố định và mặt phẳng AB'C'D chứa một tiếp tuyến cố định của mặt cầu đó.

2. Cho hình chóp SABCD, đáy là một hình vuông, cạnh $SB \perp (ABCD)$. Lấy trên SA điểm M. Mặt phẳng (BCM) cắt SD ở N. Chứng minh rằng sáu điểm A, B, C, D, M, N không thể nằm trên một mặt cầu.

3. a) Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện đó và tính bán kính của nó.

b) Cho tứ diện đều cạnh a. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu nội tiếp trong tứ diện.

4. a) Cho hình chóp tứ giác đều có góc phẳng ở đỉnh bằng 45° . Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp.

b) Tính bán kính hình cầu ngoại tiếp, biết cạnh bên bằng b.

5. Cho lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$, đáy là tam giác ABC với góc nhọn $A = \alpha$, $BC = k$ ($k > 0$), $AA' = h$.

a) Tính bán kính hình cầu ngoại tiếp lăng trụ.

b) Chứng tỏ rằng bán kính hình cầu đó không thay đổi, nếu mặt phẳng $(BCC'B')$ thay đổi, nhưng $BC = k$ không đổi, còn $(BCC'B')$ luôn song song với AA' .

c) Giả sử mặt phẳng $(BCC'B')$ thay đổi sao cho $AB + AC = l$ (l cho trước) và $(BCC'B') \parallel AA'$. Tìm vị trí của $(BCC'B')$ để bán kính hình cầu bé nhất.

6. Cho tứ diện đều $ABCD$, AH là đường cao của tứ diện, I là trung điểm của AH .

a) Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $IBCD$.

b) Gọi I' là điểm đối xứng với I qua H . Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp đa diện $ABCDI'$.

c) Tính tỷ số bán kính của ba mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, $IBCD$, $ABCDI'$.

7. Chứng minh rằng sáu mặt phẳng đi qua sáu trung điểm của sáu cạnh của một tứ diện bất kỳ và vuông góc với cạnh đối diện đồng quy tại một điểm.

8. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy là hình chữ nhật $ABCD$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Trên CD ta chọn điểm M , trên BC chọn điểm N , sao cho $CM + CN = k$ (k không đổi, $k > 0$).

a) Tìm quỹ tích tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SCMN$, khi M, N thay đổi.

b) Xác định vị trí của M, N để bán kính mặt cầu ngoại tiếp $SCMN$ bé nhất khi $ABCD$ là hình vuông.

9. Hình chóp $SABCD$ có đáy là tứ giác lồi $ABCD$ và $AC \perp BD$, chân đường cao trùng với giao điểm hai đường chéo H của tứ giác. Chứng minh rằng tâm của bốn hình cầu ngoại tiếp bốn

hình chóp SAHB, SBHC, SCHD và SDHA là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là hình chiếu của H trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng hình chóp $SH_1H_2H_3H_4$ nội tiếp trong hình cầu. Tính bán kính hình cầu đó, cho biết $H_1H_3 = 2a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$, $SH = 4a$.

10. Cho hình chóp SABC có các góc phẳng tại S vuông. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng 3 mặt cầu ngoại tiếp 3 hình chóp SAHB, SBHC, SCHD bằng nhau.

11. a) Xác định tâm hình cầu nội tiếp hình chóp tam giác đều, biết rằng cạnh bên gấp 2 lần cạnh đáy.

b) Chứng minh rằng trong một hình chóp tam giác đều, nếu tâm các hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau, thì cạnh bên bằng cạnh đáy.

12. Cho hình chóp SABCD, đáy là hình thoi ABCD. Cạnh bên $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh rằng có một hình cầu nội tiếp trong hình chóp.

b) Tính bán kính hình cầu đó, cho $AB = a$, $A = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$.

13. a) Cho tứ diện ABCD có $AB = CD$, $AC = BD$ và $AD = BC$. Xác định tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện và chứng tỏ rằng nó cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ấy.

14. Cho tứ diện ABCD có $AB = a$, $CD = b$, các cạnh còn lại bằng c. Xác định tâm và tính bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện.

15. Với giả thiết của ví dụ 4§1. Hãy chứng minh rằng tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện OABC, tâm mặt cầu qua 6 điểm O, A, I, K, E, F và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó thẳng hàng.

16. Cho hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. Trên Ax ta chọn điểm M, trên By chọn điểm N sao cho $AM + BN = MN$.

a) Tìm vị trí của M, N sao cho bán kính hình cầu nội tiếp trong tứ diện ABMN là lớn nhất.

b) Chứng minh rằng khi đó bán kính của hình cầu ngoại tiếp tứ diện là nhỏ nhất.

Chỉ dẫn và đáp số bài tập

CHƯƠNG V

1. a) Chỉ cần chứng minh rằng B, B', C', D' và D nhìn đoạn AC dưới một góc vuông. Gọi I là giao điểm của AC' và SH, I cố định, chỉ cần chứng tỏ $I \in B'D'$.

b) Gọi (Δ) là giao tuyến của I' với $(AB'C'D')$. (Δ) đi qua A. Mặt khác (Δ) thuộc $(AB'C'D')$ nên $(\Delta) \perp SC$, và (Δ) thuộc P, nên $(\Delta) \perp SA$, từ đó $(\Delta) \perp (SAC)$, hay $(\Delta) \perp AC$, AC là đường kính của hình cầu ngoại tiếp đa diện $AB'C'D'CD$, nên (Δ) là tiếp tuyến.

2. Chỉ cần chỉ ra rằng đa diện ABCDMN có một mặt không nội tiếp được trong hình tròn ; đó là hình thang vuông ADNM.

3. a) Xem tứ diện ABCD là hình chóp đều đỉnh D, đáy là ΔABC . Gọi I là tâm vòng tròn ngoại tiếp đáy. Khi đó $DI \perp (ABC)$. Dựng mặt phẳng trung trực của AD. Nó cắt DI tại O là tâm mặt cầu. Bằng cách xét các tam giác đồng dạng ta có thể xác định vị trí của O trên DI, O chia đoạn DI theo tỷ số

$$\frac{DO}{DI} = \frac{3}{4}.$$

$$b) R = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

4. a) Gọi S là đỉnh, ABCD là đáy của hình chóp. Tâm O của hình cầu ngoại tiếp là giao điểm của SI với mặt phẳng trung trực của SA. (I là giao điểm hai đường chéo).

$$b) R = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2(1+\sqrt{2})^3}}{2+\sqrt{2}}.$$

$$5. a) R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^2}{\sin^2 \alpha} + h^2}.$$

b) Tính R vì k, h không đổi, nên R không đổi.

c) Theo định lý hàm số cosin, ta có

$$\begin{aligned} k^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha = \\ &= l^2 - 2AB \cdot AC(1 + \cos \alpha). \end{aligned}$$

Để R đạt min thì k đạt min, hay AB.AC đạt max. Vì

$$AB + AC = l \text{ không đổi, nên } AB \cdot AC \text{ đạt max khi } AB = AC = \frac{l}{2}.$$

6. a) Dễ dàng nhận thấy rằng hình chóp IBCD là đều và các góc phẳng tại I vuông. Giao điểm O nhận được từ mặt phẳng trung trực của đoạn IA với AH, là tâm hình cầu.

b) Hãy nghiệm lại rằng các đỉnh B, C, D nhìn AI' dưới góc vuông bằng định lý đảo Pitago. Tâm mặt cầu qua 5 điểm A, B, C, D, I' là trung điểm của AI'.

c) Gọi R_1, R_2, R_3 lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp các tứ diện ABCD, IBCD và I'ABCD.

$$\frac{R_1}{R_2} = 1; \frac{R_2}{R_3} = 1, \text{ vậy } R_1 : R_2 : R_3 = 1 : 1 : 1.$$

7. Gọi I, J là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ diện ABCD, O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện, H là trung điểm của IJ, M là điểm đối xứng với O qua H. Dễ thấy rằng tứ giác OIJM là hình bình hành. Vì thế mặt phẳng qua I, vuông góc

với CD sẽ chứa M, mặt phẳng qua J vuông góc với AB cũng qua M. Vậy M là điểm đồng quy của 6 mặt phẳng.

8. Xác định tâm O của hình cầu ngoại tiếp hình chóp SMNC. O thuộc mặt phẳng cố định, OI có phương vuông góc với (ABCD) hay $OI \parallel SA$. Ta hãy tìm quỹ tích I rồi suy ra quỹ tích của O. Khi M, N di động, sao cho $CM + CN$ không đổi, thì quỹ tích của I nằm trên cạnh huyền của tam giác vuông cân đỉnh C, có các cạnh góc vuông bằng $\frac{k}{2}$, (O thuộc mặt phẳng qua cạnh huyền và có phương song song với SA, nên O nằm trên giao tuyến của 2 mặt phẳng).

Chú ý :

Nếu $\frac{k}{2} \leq \min(AB; AD)$, thì quỹ tích của I là cả đoạn thẳng cạnh của tam giác ;

Nếu $\frac{k}{2} > \min(AB; AD)$, thì quỹ tích của I chỉ là một đoạn thuộc hình chữ nhật.

b) Khi ABCD là hình vuông, thì $BD \perp (SAC)$ nên BD song song với mặt phẳng trung trực của SC. Mặt khác cạnh huyền của tam giác vuông cân tại đỉnh C với cạnh bằng $k/2$ cũng vuông góc với (SAC), nên cạnh đó song song với mặt phẳng trung trực. Do đó quỹ tích của O là đoạn thẳng song song với quỹ tích của I. Để OC ngắn nhất, thì O phải là chân đường vuông góc hạ từ C lên quỹ tích của O. Nếu hình chiếu này nằm ngoài quỹ tích, thì OC ngắn nhất là một trong 2 đoạn nối C với đầu mút của đoạn quỹ tích chứa O.

9. Tâm của 4 mặt cầu này đều nằm trên mặt phẳng trung trực của SH. Bốn trung điểm của AB, BC, CD và DA là đỉnh

của hình bình hành, nên 4 tâm mặt cầu cũng là đỉnh của hình bình hành.

Dễ thấy rằng $H_1H_2H_3H_4$ là tứ giác nội tiếp, vậy hình chóp $SH_1H_2H_3H_4$ nội tiếp trong hình cầu.

10. Tâm 3 mặt cầu nằm trên mặt phẳng trung trực của cạnh SH nên khoảng cách từ đó tới mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Ta chỉ cần chứng tỏ 3 vòng tròn ngoại tiếp $\triangle AHB$, $\triangle BHC$, $\triangle CHA$ là bằng nhau.

11. a) Giả sử $SABC$ là hình chóp đều, gọi I là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC , khi đó I cách đều 3 mặt bên của hình chóp. Vậy tâm O của mặt cầu nội tiếp là giao điểm của mặt phẳng phân giác của một góc nhị diện nào đó ở đáy với SI , ngoài ra

$$\frac{SO}{OI} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

b) Nếu O cũng là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, thì khoảng cách từ O đến (ABC) bằng khoảng cách từ O đến (SAB) . Vậy các bán kính vòng tròn ngoại tiếp tam giác ABC và SAB là bằng nhau.

Theo định lý hàm số sin, ta có :

$$\frac{AB}{\sin \widehat{ASB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}}, \text{ hay } \widehat{ASB} = 60^\circ.$$

12. a) Xem lại ví dụ 5, §4.

$$b) \text{ Dùng công thức } V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r, \text{ suy ra } r = \frac{3a}{2(2 + \sqrt{3})}.$$

13. Tâm mặt cầu nội tiếp nằm trên giao tuyến của 2 mặt phẳng phân giác của các góc nhị diện cạnh AB và CD . Do các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau, nên vòng tròn ngoại

tiếp các tam giác đó có bán kính bằng nhau, vậy khoảng cách từ tâm của hình cầu ngoại tiếp đến các mặt của tứ diện là bằng nhau. Mặt khác tâm của hình cầu nội tiếp tứ diện là duy nhất, nên hai tâm này trùng nhau.

14. Gọi I là điểm giữa của AB, J là điểm giữa CD, khi đó IJ là giao tuyến của 2 mặt phẳng phân giác. Tâm mặt cầu nội tiếp là giao điểm của một mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh BC với IJ.

Dùng công thức : $V = \frac{1}{3} S_{tp} \cdot r$. Ta tính được bán kính hình cầu nội tiếp :

$$r = \frac{ab\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}}{b\sqrt{4c^2 - b^2} + a\sqrt{4c^2 - a^2}} \quad (\text{với điều kiện } 4c^2 > a^2 + b^2).$$

15. Chỉ cần chứng tỏ rằng đường thẳng qua tâm của mặt cầu chứa 6 điểm và tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là giao tuyến của 2 mặt phẳng phân giác.

16. a) Ta có $r = \frac{3V}{S_{tp}}$.

Ta thấy rằng V có giá trị không đổi, vậy chỉ cần tìm vị trí M, N để S_{tp} đạt cực tiểu. Đặt $AB = a$, $AM = x$, $BN = y$, thì

$$S_{tp} = \frac{a(x+y)}{2} + \frac{1}{2} (y\sqrt{a^2 + x^2} + x\sqrt{a^2 + y^2}).$$

Vì $x \cdot y = \frac{a^2}{2}$, nên S_{tp} đạt cực tiểu khi $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Bán kính hình cầu ngoại tiếp bằng

$$R = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \geq \sqrt{a^2 + 2xy} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Vậy R cũng đạt cực tiểu khi $x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

CHƯƠNG V I

TỔ HỢP HÌNH CHÓP, NÓN, CẦU

§1. Mặt nón, hình nón

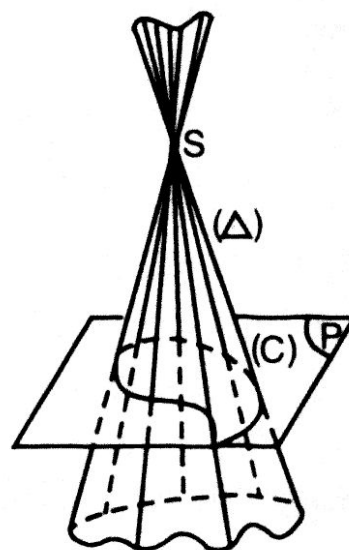
CÁC KHÁI NIỆM VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

a) Cho trước một đường cong phẳng (C), một điểm S không thuộc mặt phẳng chứa (C). Hợp của những đường thẳng (Δ) đi qua S và tựa trên (C) tạo thành một mặt gọi là mặt nón.

Đường cong (C) gọi là đường chuẩn, đường thẳng (Δ) gọi là đường sinh, điểm S gọi là đỉnh của mặt nón.

* Nếu (C) khép kín, thì mặt nón được gọi là kín.

* Nếu (C) là đường tròn, còn hình chiếu của S trên mặt phẳng chứa (C) trùng với tâm O của nó, thì mặt nón gọi là tròn xoay. Đường thẳng SO gọi là trục của mặt nón.



Hình 139

b) Phần không gian giới hạn bởi mặt nón tròn xoay và mặt phẳng vuông góc với trục, cắt tất cả các đường sinh của mặt nón đó gọi là hình nón tròn xoay.

Giao tuyến của mặt phẳng vuông góc đó với mặt nón là một đường tròn. Đường tròn này gọi là đường tròn đáy của hình nón.

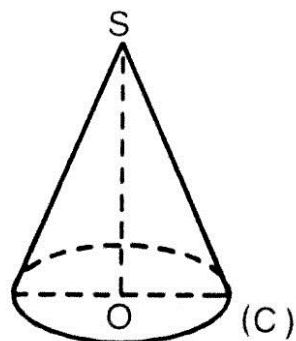
* Nếu gọi S_d là diện tích đáy, h là chiều cao, p là chu vi, l là đường sinh, thì thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón là :

$$V = \frac{1}{3} S_d h, \quad S_{xq} = \frac{p \cdot l}{2}.$$

* Nếu cắt hình nón bằng mặt phẳng đi qua đỉnh, thì thiết diện tạo thành là tam giác cân.

* Nếu cắt hình nón bằng mặt phẳng song song với đáy thì thiết diện tạo thành là hình tròn.

Ví dụ 1. Trong không gian cho trước hai điểm S, O. Xét các đường thẳng (Δ) đi qua S và cách O một khoảng h cho trước. Chứng minh rằng (Δ) nằm trên một mặt nón tròn xoay.



Hình 140

Giải : Dựng mặt phẳng P qua O và vuông góc với SO.

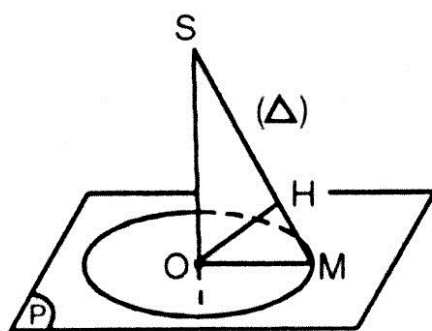
Giả sử đường thẳng (Δ) qua S cắt P tại M.

Xét ΔSOM ta có :

$\widehat{SOM} = 1v$, nên dễ dàng chứng minh được

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2}$$

Từ đó suy ra OM không đổi và M nằm trên đường tròn tâm O trong mặt phẳng P với bán kính bằng



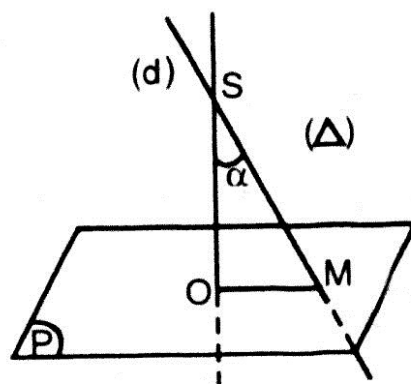
Hình 141

$$\frac{SO \cdot OH}{\sqrt{SO^2 - OH^2}} = \frac{h \cdot SO}{\sqrt{SO^2 - h^2}}$$

Vì $S \notin P$, nên theo định nghĩa ta suy ra (Δ) nằm trên mặt nón đỉnh S, đường chuẩn (O). Mặt nón này tròn xoay, vì hình chiếu S trên P trùng với O.

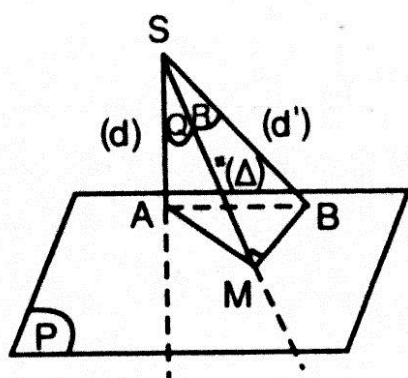
Ví dụ 2. Trong không gian cho trước đường thẳng (d), điểm S cố định trên (d). Xét các đường thẳng (Δ) đi qua S và hợp với (d) một góc α cho trước. Chứng minh rằng (Δ) nằm trên một mặt nón tròn xoay.

Giải : Lấy trên (d) một điểm O khác S ; dựng qua O mặt phẳng $P \perp SO$. Giả sử (Δ) đi qua S , cắt P tại M khi đó $OM = SO \tan \alpha$. Khi đó M thuộc đường tròn tâm O bán kính $SO \tan \alpha$; theo định nghĩa, (Δ) là đường sinh của mặt nón đỉnh S , đường chuẩn là đường tròn tâm O bán kính $SO \tan \alpha$. Mặt nón này tròn xoay vì hình chiếu của S trùng với O (hình 142).



Hình 142

Ví dụ 3. Cho trước một mặt phẳng P , một đường thẳng $d \perp P$ tại một điểm A cố định, một đường thẳng cố định d' cắt P tại B và (d) tại S . Xét mặt phẳng Q qua (d) , mặt phẳng R qua (d') . Gọi (Δ) là giao tuyến của Q và R . Chứng minh rằng (Δ) luôn luôn nằm trên mặt nón cố định khi Q và R biến thiên nhưng luôn vuông góc với nhau.



Hình 143

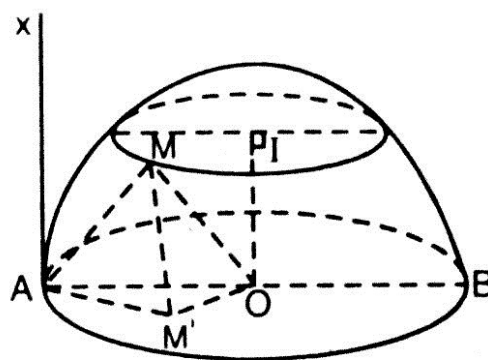
Vậy (Δ) luôn nằm trên mặt nón đỉnh S , với đường chuẩn là đường tròn nói trên.

Giải : (hình 143). Gọi M là giao điểm của (Δ) với P . Rõ ràng BM là giao tuyến của P và R . Ta lại có $Q \perp P$ và $Q \perp R$, nên $BM \perp Q$ vì BM là giao tuyến của P và R , từ đó $BM \perp AM$.

Khi Q quay quanh d , thì M nằm trên đường tròn đường kính AB trong P . Từ đó suy ra (Δ) luôn qua S và cắt đường tròn đường kính AB .

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng P cho đường tròn tâm O , đường kính AB . Xét nửa hình cầu nhận đường tròn O làm đường tròn lớn. Cắt nửa hình cầu trên bằng mặt phẳng Q song song với P

ta được thiết diện hình tròn tâm I. Lấy trên đường tròn (I) điểm M sao cho hình chiếu M' của M trên P nhìn đoạn OA dưới một góc vuông.



a) Chứng minh rằng $\triangle AMM'$ là vuông cân.

b) Chứng minh rằng khi Q thay đổi, thì đường thẳng AM nằm trên một mặt nón tròn xoay cố định.

Hình 144

Giải : a) Xét hai tam giác vuông $\triangle MM'O$ và $\triangle AM'O$ có $M'O$ chung, $OA = OM$ (cùng bằng bán kính của hình cầu) ; suy ra $MM' = AM'$. Vậy $\triangle AMM'$ vuông cân.

b) Kẻ từ A đường thẳng $Ax \perp P$. Vì P và A cố định, nên Ax cố định. Mặt khác $Ax \parallel MM'$, đồng thời $\widehat{MAM'} = 45^\circ$, nên AM hợp với Ax một góc 45° không đổi. Theo kết quả của ví dụ 2 ta suy ra tồn tại mặt nón chứa AM, có trục là Ax, đỉnh A, các đường sinh nghiêng với trục một góc 45° (hình 144).

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng P cho đường tròn (O). Xét hình nón tròn xoay đỉnh S nhận (O) làm hình tròn đáy. M là điểm bất kỳ thuộc P. MA, MB là tiếp tuyến kẻ từ M tới đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng các $\triangle SAM$, $\triangle SBM$ là vuông và trung điểm của đoạn SM cách đều các điểm A, B và tâm O của (O).

b) Gọi I là trung điểm của đáy AB, H là hình chiếu của I trên SM. Chứng minh rằng IH là đường vuông góc chung của SM và AB, $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện hợp bởi hai mặt phẳng (SMA), (SMB).

c) Tính OM nếu $SO = h$, $OA = r$, $\widehat{AHB} = 1v$.

d) Chứng minh rằng $\cos \widehat{AMB} = k^2$, (ở đây $k = \frac{r}{h}$ và $r < h$).

Giải : (hình 145).

a) Ta thấy OA là hình chiếu của SA trên P và $MA \perp OA$, nên $SA \perp MA$, tương tự $SB \perp MB$.

Ba tam giác vuông SMA, SMB, SMO có chung cạnh huyền SM, nên trung điểm của đoạn SM cách đều A, O, B.

b) Vì I là trung điểm của AB, nên OM đi qua I và $OM \perp AB$, mà $SO \perp AB$, nên $AB \perp (SMO)$, từ đó $AB \perp IH$.

Ta lại có $SM \perp AB$ và $SM \perp IH$, nên $SM \perp (AHB)$, từ đó $\widehat{AHB}$ là góc phẳng của nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (AMS) và (BMS).

c) Vì tam giác SAM vuông ở A nên

$$SA \cdot AM = SM \cdot AH. \quad (1)$$

Mặt khác, $\triangle AHB$ cân, vì IH vừa là trung tuyến vừa là đường cao, nên $AH = AI\sqrt{2}$. Ta lại có $\triangle MAO$ vuông tại A, nên $AI \cdot OM = OA \cdot AM$. Vậy

$$AH = AI\sqrt{2} = \frac{OA \cdot AM\sqrt{2}}{OM}$$

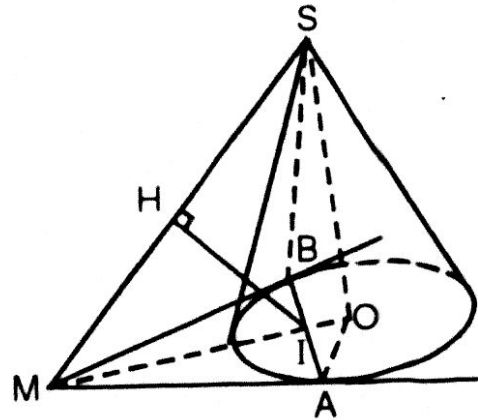
Thay vào (1) ta được :

$$SA \cdot AM = SM \cdot \frac{OA \cdot AM\sqrt{2}}{OM}, \text{ hay } SA \cdot OM = SM \cdot OA\sqrt{2},$$

$$\text{hay } SA^2 \cdot OM^2 = 2SM^2 \cdot AO^2, \text{ hay } (h^2 + r^2)OM^2 =$$

$$= 2(h^2 + OM^2)r^2, \text{ hay } (h^2 - r^2)OM^2 = 2h^2r^2. \text{ Với điều kiện } h > r \text{ ta có}$$

$$OM = \frac{hr\sqrt{2}}{\sqrt{h^2 - r^2}}. \text{ Đặt } k = \frac{r}{h}, \text{ thì}$$



Hình 145

$$OM = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{1-k^2}} = r \cdot \sqrt{\frac{2}{1-k^2}} \quad (2)$$

d) Từ (2) suy ra $\sin \alpha = \frac{OA}{OM} = \sqrt{\frac{1-k^2}{2}}$ $\alpha = \widehat{AMO}$,

hay $\sin 2\alpha = \frac{1-k^2}{2}$, hay $\frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1-k^2}{2}$, hay $\cos 2\alpha = k^2$.

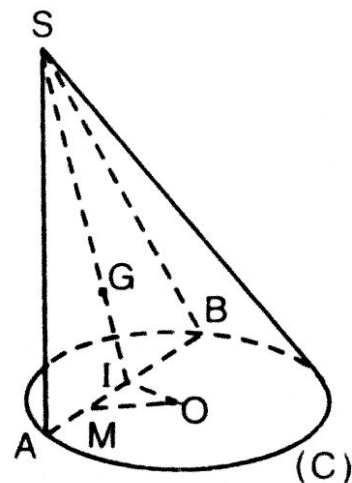
Vậy $\cos \widehat{AMB} = k^2$.

Ví dụ 6. Cho trước hình nón (tùy ý) đỉnh S, đáy là hình tròn (C) tâm O. M là điểm cố định nằm trong hình tròn (C). Xét mặt phẳng biến đổi đi qua SM cắt hình nón theo tiết diện tam giác. Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác đó.

Giải : (hình 146). Giả sử SAB là thiết diện bất kỳ, gọi G là trọng tâm của $\triangle SAB$ (AB là dây cung), I là trung điểm AB khi đó $G \in SI$ và

$$\frac{SG}{SI} = \frac{2}{3}$$

Chứng tỏ rằng G là ảnh của I trong phép vị tự tâm S, tỉ số $2/3$. Quỹ tích của G là ảnh quỹ tích của I trong phép vị tự này. Ta sẽ tìm quỹ tích I.



Hình 146

Ta thấy rằng quỹ tích của I là đường tròn đường kính OM.

Vậy quỹ tích của G là đường tròn đường kính $O'M'$ trong mặt phẳng song song với (C), trong đó O' và M' là ảnh của O và M trong phép vị tự tâm S, tỉ số $2/3$.

Chú ý : Nếu M trùng với O, thì quỹ tích G suy biến thành một điểm vì khi đó quỹ tích của I cũng là điểm O.

§2. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp hình cầu

Các khái niệm và tính chất cơ bản

a) Một hình nón gọi là nội tiếp trong hình cầu, hoặc hình cầu gọi là ngoại tiếp hình nón, nếu đỉnh của hình nón nằm trên mặt cầu, đáy hình nón là một thiết diện của hình cầu đó. Từ đó suy ra :

* Đối với hình nón tròn xoay tâm hình cầu ngoại tiếp nằm trên trục hình nón.

* Giả sử S là đỉnh của hình nón tròn xoay, S' là điểm xuyên tâm đối của S và SA là một đường sinh, thì $SA \perp S'A$.

* Cắt tổ hợp hình nón cầu này bằng mặt phẳng đi qua trục của hình nón tròn xoay, ta được thiết diện là tam giác cân nội tiếp trong hình tròn lớn của hình cầu.

* Mọi hình nón (tròn xoay hay không tròn xoay) có đáy là hình tròn đều nội tiếp được trong hình cầu.

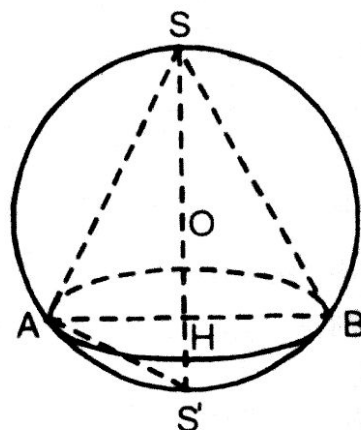
b) Một hình cầu đặt trong hình nón tròn xoay, tiếp xúc với tất cả các đường sinh và đáy hình nón thì nói : hình cầu nội tiếp trong hình nón, hoặc hình nón ngoại tiếp hình cầu. Từ đó ta suy ra :

* Các đường sinh của hình nón là các tiếp tuyến của hình cầu.

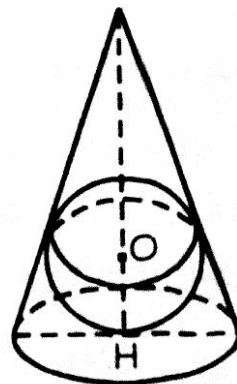
* Đáy hình nón là tiếp diện của hình cầu.

Ví dụ 1. Cho hình cầu bán kính R , một hình nón tròn xoay chiều cao x nội tiếp trong hình cầu.

a) Tính thể tích hình nón theo x , R .



Hình 147



Hình 148

b) Tính thể tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón theo x , R .

c) Với giá trị nào của x thì các đại lượng trên đạt cực đại ?

Giải : a) Gọi S là đỉnh của hình nón, S' là điểm xuyên tâm đối của S , SA là đường sinh, SI là đường cao, O là tâm hình cầu ngoại tiếp. Vì tam giác SAS' vuông tại A , nên

$$AI^2 = SI \cdot S'I = x(2R - x). \text{ Vậy :}$$

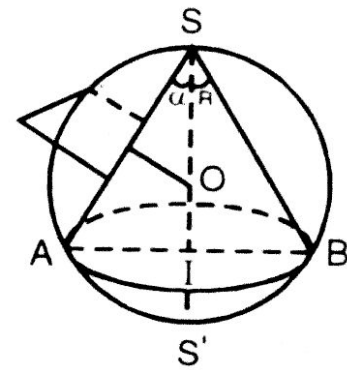
$$V = \frac{1}{3} \pi AI^2 \cdot SI = \frac{1}{3} \pi x^2(2R - x).$$

b) Cũng trong tam giác vuông SAS' ta có

$$SA^2 = SI \cdot SS' = 2Rx.$$

hay

$$SA = \sqrt{2Rx}. \text{ Vậy}$$



Hình 149

$$S_{xq} = \pi AI \cdot SA = \pi \sqrt{x(2R - x)} \cdot \sqrt{2Rx} =$$

$$= \pi \cdot \sqrt{2R} \cdot \sqrt{x^2(2R - x)} = \pi \cdot x \sqrt{2R(2R - x)} ;$$

$$S_{xq} + S_d = \pi \sqrt{2R} \sqrt{x^2(2R - x)} + \pi x(2R - x) =$$

$$= \pi x(\sqrt{2R(2R - x)} + 2R - x).$$

c) Dễ thấy thể tích V và diện tích xung quanh S_{xq} đạt cực đại, khi và chỉ khi $y = x^2(2R - x)$ đạt cực đại.

Ta có

$$y = x \cdot x \cdot (2R - x) = \frac{1}{2} x \cdot x(4R - 2x)$$

Ta thấy $x + x + (4R - 2x) = 4R$ không đổi, nên tích 3 số hạng đó lớn nhất khi và chỉ khi $x = x = 4R - 2x$, hay $3x = 4R$,

$$\text{hay } x = \frac{4R}{3}. \text{ Vậy } V \text{ và } S_{xq} \text{ đạt cực đại khi } x = \frac{4R}{3}.$$

Ta còn phải tìm điều kiện để diện tích toàn phần đạt giá trị cực đại. Ta có

$$S_{tp} = \pi(\sqrt{2Rx^2(2R - x)} + x(2R - x)).$$

Đặt $\alpha = \widehat{ASI}$, $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Khi đó $SA = 2R\cos\alpha$,

$SI = SA\cos\alpha$, từ đó $x = 2R\cos^2\alpha$, và

$$\begin{aligned} S_{tp} &= \pi(\sqrt{2R \cdot 4R^2\cos^4\alpha \cdot 2R \cdot \sin^2\alpha} + 2R\cos^2\alpha \cdot 2R\sin^2\alpha) = \\ &= \pi(4R^2\cos^2\alpha\sin\alpha + 4R^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha) = \\ &= 4R^2\pi\cos^2\alpha(\sin\alpha + \sin^2\alpha). \end{aligned}$$

S_{tp} đạt cực đại khi và chỉ khi $P = \cos^2\alpha(\sin\alpha + \sin^2\alpha)$ đạt cực đại. Đặt $t = \sin\alpha$. Khi đó

$$P = (1 - t^2)(t + t^2), \text{ với } 0 < t < 1;$$

$P' = (t + 1)(-4t^2 + t + 1)$. Bằng cách xét dấu của P' và chiều biến thiên của P trong khoảng $(0; 1)$, ta đi đến kết luận :

P hay S_{tp} đạt cực đại khi và chỉ khi $t = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$, tức là khi

$$x = 2R\cos^2\alpha = 2R(1 - t^2) = \frac{R(23 - \sqrt{17})}{16}$$

Ví dụ 2. cho một hình nón tròn xoay có đường sinh bằng đường kính đáy. Xác định tâm hình cầu ngoại tiếp hình nón đó.

Giải : Gọi S là đỉnh, trục SI , O là tâm hình cầu ngoại tiếp của hình nón, $O \in SI$. Để xác định O trên SI ta dựng mặt phẳng trung trực của một đường sinh nào đó. Mặt phẳng này cắt SI tại điểm O cần tìm.

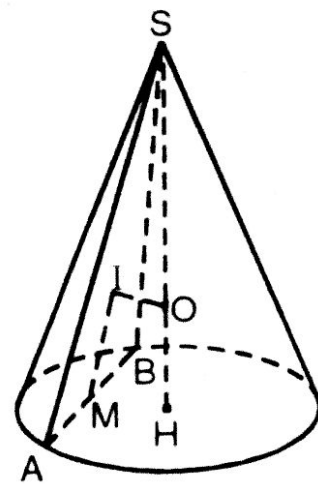
Giả sử SAB là một thiết diện qua trục hình nón. ΔSAB là tam giác đều. Mặt phẳng thiết diện cắt mặt cầu ngoại tiếp hình nón theo một vòng tròn ngoại tiếp ΔSAB nhận O làm tâm. Do

DSAB đều, nên O là trọng tâm DSAB, tức là O chia SI theo tỷ

$$\text{số } \frac{SO}{SI} = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 3. Cho trước một hình nón tròn xoay đỉnh S, điểm M cố định nằm trên đáy hình tròn (M nằm trong hình tròn, khác tâm của đáy). Mặt phẳng bất kỳ đi qua SM cắt hình nón theo thiết diện tam giác. Gọi I là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng khi mặt phẳng thay đổi quanh SM, thì I nằm trên một vòng tròn cố định.

Giải : (hình 150). Giả sử O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình nón đỉnh S, khi đó O nằm trên trục SH của hình nón đó. Giả sử mặt phẳng qua SM cắt hình nón theo thiết diện là $\triangle SAB$ (AB là dây cung qua M). Mặt phẳng này cắt hình cầu O theo một hình tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$. I là tâm của thiết diện tròn này. Theo tính chất của thiết diện tròn ta có $OI \perp (SAB)$, như vậy I nhìn đoạn SO cố định dưới một góc vuông. I thuộc mặt cầu đường kính SO. Mặt khác I cũng nhìn đoạn OM cố định dưới một góc vuông, I thuộc mặt cầu đường kính OM. Vậy I nằm trên giao tuyến của 2 mặt cầu, tức là I nằm trên một đường tròn cố định.



Hình 150

Ví dụ 4. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O.

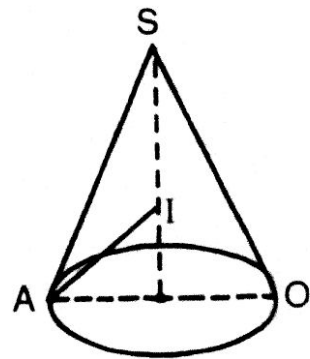
a) Tìm tâm mặt cầu nội tiếp trong hình nón.

b) Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích toàn phần của hình nón và diện tích mặt cầu, V_1, V_2 là thể tích của chúng. Chứng minh

$$\text{rằng } \frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

c) Chứng minh rằng $\frac{V_1}{V_2} \geq 2$. Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Giải : (hình 151). a) Ta đã biết mọi điểm thuộc đường cao SO của hình nón cách đều tất cả các đường sinh của hình nón đó. Vẽ đường phân giác của góc SAO cắt SO ở I, vậy I sẽ cách đều các đường sinh và đáy. Vậy I chính là tâm của mặt cầu nội tiếp trong hình nón đã cho.



b) Ta ký hiệu l, h, R, r lần lượt là độ dài của đường sinh, đường cao, bán kính đáy của hình nón, bán kính mặt cầu nội tiếp.

Hình 151

Khi đó ta có :

$$S_1 = \pi Rl + \pi R^2, V_1 = \frac{1}{3} \pi R^2 h,$$

$$S_2 = 4\pi r^2, V_2 = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Đẳng thức

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_1}{S_2} \text{ tương đương với } \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 h}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{\pi Rl + \pi R^2}{4\pi r^2}$$

$$\text{hay } \frac{Rh}{4r^3} = \frac{l+R}{4r^2}, \text{ hay } \frac{Rh}{r} = l+R. \quad (*)$$

Xét $\triangle SAO$ có AI là đường phân giác trong của SAO nên :

$$\frac{SA}{AO} = \frac{SI}{IO}, \text{ hay } \frac{SA}{AO} + 1 = \frac{SO}{IO},$$

$$\text{hay } \frac{1}{R} + 1 = \frac{h}{r}, l+R = \frac{Rh}{r}.$$

Vậy (*) đúng, từ đó suy ra đẳng thức phải chứng minh.

c) Ta có $\frac{V_1}{V_2} = \frac{R^2 h}{4r^3}$. Đặt $2\alpha = \widehat{SAO}$, khi đó

$h = R \operatorname{tg} 2\alpha$, $r = R \operatorname{tg} \alpha$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{R^2 R \operatorname{tg} 2\alpha}{4R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{4 \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \operatorname{tg}^3 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}. \end{aligned}$$

Để thấy với mọi a, b ta có $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. Do đó

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2}\right)^2, \text{ hay}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \leq \frac{1}{4}. \text{ Từ đó } \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} \geq 2.$$

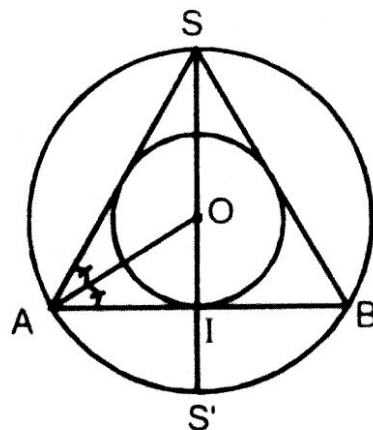
Dấu bằng xảy ra khi $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}$, hay khi $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 5. Cho một hình nón tròn xoay đỉnh S , Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp trong hình nón, S' là điểm đối xứng với O qua mặt phẳng đáy. Biết rằng S' nằm trên mặt cầu ngoại tiếp hình nón.

a) Chứng minh rằng thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác đều.

b) Tính tỷ số diện tích hình cầu nội tiếp hình nón và diện tích đáy của hình nón.

Giải : (hình 152). a) Để thấy rằng : thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân SAB (AB là đường kính đáy của hình nón) nội tiếp trong hình tròn lớn của hình



Hình 152

cầu ngoại tiếp ; đồng thời $\triangle SAB$ ngoại tiếp hình tròn lớn của hình cầu nội tiếp. Từ đó và từ các giả thiết suy ra S' là giao điểm của SO với vòng tròn ngoại tiếp $\triangle SAB$.

Vậy ta có $OS' = OA$, mặt khác vì S' đối xứng với O qua mặt phẳng đáy nên $AO = AS'$, vậy $\triangle S'AO$ là tam giác đều, do đó $\widehat{ASS'} = 30^\circ$ và $\widehat{SAB} = 60^\circ$. Tam giác ASB là tam giác cân tại đỉnh S có $\widehat{ASB} = 60^\circ$ là tam giác đều.

b) Vì $\widehat{AOI} = 60^\circ$, nên $AI = OI \operatorname{tg} 60^\circ = OI\sqrt{3}$. Từ đó tỉ số phải tính là $\frac{4\pi OI^2}{\pi \cdot OI^2 \cdot 3} = \frac{4}{3}$.

§3. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp một hình chóp

Các khái niệm và tính chất cơ bản

a) Một hình nón có đỉnh chung với hình chóp và có đáy là hình tròn ngoại tiếp đáy của hình chóp được gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp hay hình chóp nội tiếp trong hình nón.

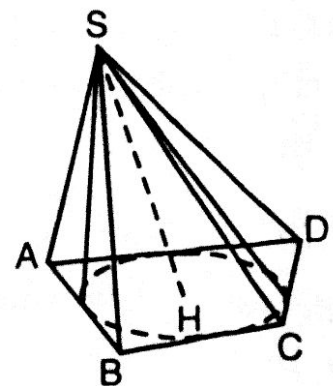
Từ đó dễ dàng suy ra : một hình chóp nội tiếp trong một hình nón, đáy là một đường tròn, thì cũng nội tiếp được trong hình cầu ngoại tiếp hình nón đó.

b) Một hình nón tròn xoay có đỉnh chung với đỉnh hình chóp, đáy của hình chóp là đa giác ngoại tiếp đáy của hình nón, gọi là hình chóp ngoại tiếp hình nón hay hình nón nội tiếp trong hình chóp.

Từ đó ta suy ra rằng :

* Đường thẳng nối đỉnh hình chóp với tiếp điểm là đường sinh của hình nón. Đường sinh này vuông góc với cạnh đáy hình chóp.

* Các góc nhị diện ở đáy hình chóp bằng nhau.



Hình 153

* Nếu gọi l là độ dài đường sinh, p là chu vi đáy hình chóp ngoại tiếp, thì

$$S_{xq} = \frac{lp}{2} \quad (*)$$

(S_{xq} là diện tích xung quanh của hình chóp).

Ví dụ 1. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S , đáy là hình tròn tâm O bán kính OA cố định, D là trung điểm của OA , BC là dây cung của hình tròn (O) và đi qua D .

a) Giả sử dây BC thay đổi, hãy xác định vị trí của BC để diện tích ΔSBC nhỏ nhất, lớn nhất.

b) Gọi G là trọng tâm của ΔSBC , I là tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác đó. Tìm quỹ tích của G và I khi BC quay quanh D .

c) Giả sử BC hợp với OA một góc φ , $OA = r$, $SO = h$. Tính thể tích hình chóp $SABC$ nội tiếp trong hình nón.

Giải : (hình 154). Ta có ΔSBC cân tại S , gọi M là điểm giữa của BC . Khi đó $SM \perp BC$, vậy diện tích s của ΔSBC là $\frac{1}{2} SM \cdot BC$.

Đặt $OA = 1$, $SA = BC = SC = l > 1$, $BC = 2x$. Khi đó $SM^2 = l^2 - x^2$. Vậy $s = x\sqrt{l^2 - x^2}$ hay $s^2 = x^2(l^2 - x^2)$. Đặt $x^2 = t$ và $s^2 = y$. Khi đó $y = t(l^2 - t) = -t^2 + l^2t$. Vì s đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi y đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tương ứng, nên ta sẽ xét hàm số y theo t , trong khoảng $\frac{3}{4} \leq t \leq 1$, (vì dễ thấy $OA\sqrt{3} \leq BC \leq 2OA$). Ta cũng có $y > 0$ với mọi t trong khoảng $0 < t < l^2$. Đồ thị của hàm y là một parabol mà đỉnh có hoành độ $t_0 = \frac{l^2}{2}$ (hình 155).

Từ đó, ta đi đến kết luận :

b) Xem lại ví dụ 6, §1 và ví dụ 3, §2.

c) Trước hết ta thấy rằng ABOC là một hình bình hành, nên diện tích ΔABC bằng diện tích ΔOBC . Đường cao của ΔOBC là OM. Ta có

$$OM = OD \sin \varphi = \frac{r}{2} \sin \varphi.$$

Trong tam giác vuông OBM, ta có $BM^2 = OB^2 - OM^2 =$

$$= r^2 - \frac{r^2}{4} \sin^2 \varphi, \text{ từ đó } BM = \frac{r}{2} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi};$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} BC \cdot OM = \frac{r}{2} \sin \varphi : \frac{r}{2} \sqrt{4 - \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{r^2 \sin \varphi \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}}{4}. \text{ Vậy } V_{SABC} = \frac{1}{3} \frac{r^2 \sin \varphi}{4} \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \varphi} h =$$

$$= \frac{r^2 h \sin \varphi}{12} \cdot \sqrt{4 - \sin^2 \varphi}.$$

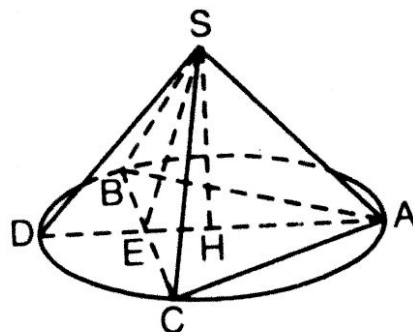
Ví dụ 2. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, hình chóp SABC nội tiếp trong hình nón đó có 3 góc phẳng tại đỉnh S vuông.

a) Chứng minh rằng góc ở đỉnh của thiết diện qua trục hình nón là một góc tù.

b) Kéo dài đường cao SH của hình nón một đoạn $HO = 2SH$ về phía H. Chứng minh rằng tứ diện OABC là tứ diện đều, hình nón ngoại tiếp tứ diện này và hình nón đỉnh S cùng nội tiếp được trong một hình cầu.

Giải : (hình 156).

a) Xét thiết diện qua trục hình nón và đường sinh SA. Thiết diện này có chung với mặt nón đường



Hình 156

sinh SD. Khi đó AD là đường kính của đáy hình nón AD cắt BC ở E. Ta thấy ngay rằng $SA \perp SE$, vì $SA \perp (SBC)$. Mặt khác vì E nằm trong đoạn AD, nên $\widehat{ASD} > \widehat{ASE} = 90^\circ$. Vậy $\widehat{ASD}$ tù

b) Vẫn theo ký hiệu trên (hình 157) ta có :

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{6}$$

$$\text{Do đó } HO = \frac{2a}{\sqrt{6}}$$

Trong tam giác vuông AHO :

$$\begin{aligned} OA^2 &= AH^2 + OH^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{4}{6} a^2 \\ &= a^2, \text{ hay } OA = a. \end{aligned}$$

Mặt khác hình chóp OABC là hình chóp đều, suy ra tứ diện OABC là tứ diện đều.

Xét $\triangle SAO$ có

$$SA^2 + AO^2 = \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2}; \text{ còn}$$

$$SO^2 = (3SH)^2 = 9SH^2 = 9 \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{3a^2}{2}. \text{ Vậy}$$

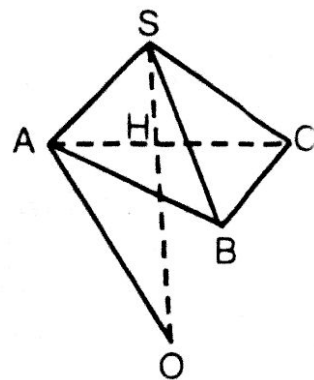
$$SA^2 + AD^2 = SO^2.$$

Chúng tỏ rằng $\triangle SAO$ vuông tại A.

Tương tự, các đỉnh B, C nhìn SO dưới một góc vuông. Vậy 5 điểm S, A, B, C, O nằm trên cùng một mặt cầu. Điều đó chứng tỏ hình nón đỉnh S và hình nón đỉnh O cùng nội tiếp được trong một mặt cầu.

Ví dụ 3. Một hình chóp ngoại tiếp một hình nón tròn xoay.

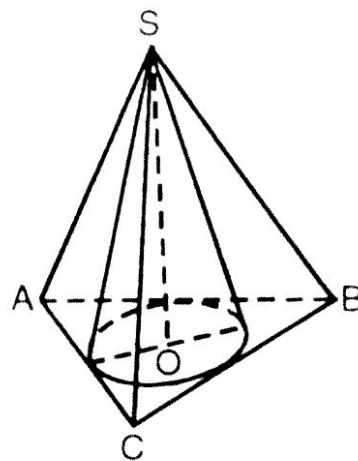
a) Chứng minh rằng với hình chóp đó luôn tồn tại mặt cầu nội tiếp.



Hình 157

b) Giả sử hình nón có chiều cao h , bán kính đáy a , tỷ số thể tích hình chóp và hình nón bằng k . Tính diện tích toàn phần của hình chóp theo a, h, k .

Giải : (hình 158) a) Giả sử $SABC$ là hình chóp ngoại tiếp hình nón đỉnh S , đáy là hình tròn (O) . Khi đó hình nón chỉ có chung với mỗi mặt bên của hình chóp một đường sinh duy nhất. Mặt khác khoảng cách từ O đến các mặt bên hình chóp bằng khoảng cách từ O đến các đường sinh thuộc các mặt hình chóp. Vì thế O cách đều các mặt bên của hình chóp. Theo 1), §4, chương V, suy ra điều phải chứng minh.



Hình 158

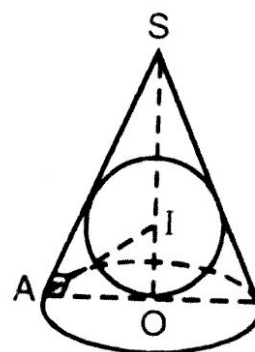
b) Gọi I là tâm mặt cầu nội tiếp trong hình nón ; (I) tiếp xúc với mọi đường sinh, nên (I) tiếp xúc với các mặt bên hình chóp. Vì vậy (I) cũng là mặt cầu nội tiếp trong hình chóp. Áp dụng hệ thức :

$$V = \frac{1}{3} r \cdot S_{tp}$$

ta có
$$S_{tp} = \frac{3V}{r} \quad (1)$$

Thể tích hình nón $V_n = \frac{1}{3} \pi a^2 h$,
từ đó

$$V = k \cdot V_n = \frac{k\pi a^2 h}{3}$$



Hình 159

Xét tam giác SAO với AI là phân giác của góc $\widehat{SAO}$, theo tính chất của đường phân giác trong tam giác ta có :

$$\frac{SI}{IO} = \frac{SA}{AO}, \text{ từ đó } \frac{SI}{IO} + 1 = \frac{SA}{AO} + 1,$$

hay $\frac{SO}{IO} = \frac{SA}{AO} + 1$, hay $\frac{h}{r} = \frac{\sqrt{h^2 + a^2}}{a} + 1$.

Vậy

$$\frac{r}{h} = \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2} + a}, \text{ từ đó } r = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2} + a}$$

Thay các kết quả vừa tính vào (1) ta được :

$$S_{tp} = \frac{k\pi a^2 h}{ah} = k\pi a (\sqrt{a^2 + h^2} + a).$$

Ví dụ 4. Hình chóp tứ giác SABCD ngoại tiếp hình nón tròn xoay đỉnh S, đáy là hình tròn O.

a) Chứng minh rằng

$$dt(\triangle SAB) + dt(\triangle SCD) = dt(\triangle SBC) + dt(\triangle SAD).$$

b) Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \cotg \widehat{SAB} + \cotg \widehat{SBA} + \cotg \widehat{SCD} + \cotg \widehat{SDC} &= \\ &= \cotg \widehat{SAD} + \cotg \widehat{SDA} + \cotg \widehat{SBC} + \cotg \widehat{SCB}. \end{aligned}$$

Giải : a) Vì ABCD ngoại tiếp hình tròn đáy của hình nón, nên $AB + CD = AD + BC$, từ đó $\frac{1}{2} l \cdot AB + \frac{1}{2} l \cdot CD =$

$$= \frac{1}{2} l \cdot AD + \frac{1}{2} l \cdot BC. \text{ Đó là điều phải chứng minh.}$$

b) Giả sử M là tiếp điểm của AB với vòng tròn O. Khi đó $AB = AM + MB$.

Mặt khác xét các tam giác vuông SAM và SBM, ta có

$$SM \cotg \widehat{SAB} = AM,$$

$$SM \cotg \widehat{SBA} = BM.$$

Cộng hai đẳng thức trên ta được

$$SM(\cotg \widehat{SAB} + \cotg \widehat{SBA}) = AB.$$

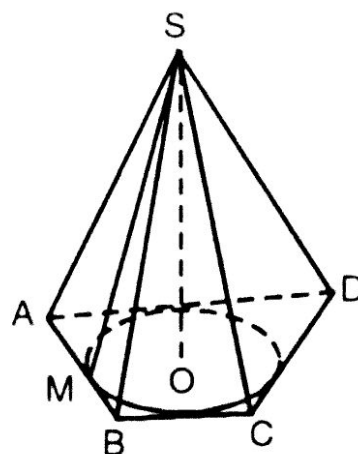
Tương tự :

$$SM(\cotg \widehat{SCD} + \cotg \widehat{SDC}) = CD,$$

$$SM(\cotg \widehat{SAB} + \cotg \widehat{SCB}) = BC,$$

$$SM(\cotg \widehat{SAD} + \cotg \widehat{SDA}) = AD.$$

Vì $AB + DC = AD + BC$, ta suy ra điều cần chứng minh.



Hình 160

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

1. Cho một mặt nón tròn xoay đỉnh S, một đường thẳng d cố định qua S. Một mặt phẳng P qua d cắt mặt nón theo các đường sinh I_1 và I_2 . Gọi α, β là góc hợp bởi d với I_1, I_2 tương ứng. Chứng minh rằng $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ không đổi.

2. Cho hai điểm A và O cố định trong một mặt phẳng P và cho trước một đường thẳng $Ox \perp P$. Một mặt cầu thay đổi luôn tiếp xúc với P tại A, cùng một mặt phẳng thay đổi luôn qua Ox, tiếp xúc với mặt cầu nói trên. Chứng minh rằng tiếp điểm M của hai mặt thay đổi ấy luôn luôn nằm trên một mặt nón tròn xoay cố định.

3. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S, M là một điểm cố định trên mặt phẳng đáy của hình nón. Xét mặt phẳng thay đổi qua SM cắt hình nón theo các đường sinh SP, SQ. Gọi α là góc giữa SM và PQ. Chứng minh rằng :

$$\frac{dt(\Delta SMP) \cdot dt(\Delta SMQ)}{\sin^{\alpha}}$$

là không đổi. Khi nào thì tích $dt(\Delta SMP) \cdot dt(\Delta SMQ)$ là bé nhất ?

4. Chứng minh rằng đối với một hình nón tròn xoay có tâm các hình cầu nội tiếp và ngoại tiếp trùng nhau thì :

- a) Thiết diện qua trục là một tam giác đều ;
- b) Góc trái ở đỉnh bằng 180° .

5. Chứng minh rằng nếu một hình chóp tứ giác ngoại tiếp một hình nón tròn xoay mà tâm của đáy của hình nón cách đều các cạnh bên thì hình chóp đó đều.

6. Cho trước một hình cầu tâm O, bán kính R.

a) Xác định một hình nón có thể tích nhỏ nhất ngoại tiếp hình cầu đó.

b) Xác định một hình nón có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu đó.

7. Tính thể tích của hình trụ có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình nón có diện tích toàn phần lớn nhất nội tiếp trong hình cầu đã cho.

Chỉ dẫn và đáp số bài tập

CHƯƠNG VI

1. Gọi H là giao điểm của d với P. SA, SB là các đường sinh tạo bởi mặt nón với P. Giả sử H ở trong hình tròn đáy nón. Khi đó HA.HB không đổi.

Kẻ phân giác trong $\widehat{ASH}$ và $\widehat{BSH}$. Gọi N, M là giao của chúng với AB.

Kẻ đường vuông góc với SH cắt SN tại E, SM tại F. Để chứng minh rằng tứ giác NEMF nội tiếp trong vòng tròn. Ta có :

$$HM \cdot HN = HE \cdot HF,$$

$$\frac{HN}{HA} = \frac{SH}{SH + SA} ; \frac{HM}{HB} = \frac{SH}{SH + SB} ,$$

nên HN.HM không đổi.

2. Hình chiếu của một đoạn thẳng, một đường thẳng

Cho trước một mặt phẳng P , một đoạn thẳng AB không nằm trong P , tập hợp tất cả các hình chiếu của mọi điểm thuộc đoạn AB gọi là hình chiếu của AB .

* Nói chung hình chiếu của đoạn AB là đoạn $A'B'$, trừ khi phương của AB song song với phương chiếu, khi đó $A'B'$ suy biến về một điểm (ở đây A' , B' lần lượt là hình chiếu của A , B trên P).

* Nếu gọi α là góc hợp bởi phương AB với P ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) thì :

$$A'B' = AB \cos \alpha. \quad (*)$$

Từ (*) ta có 2 hệ quả sau :

* Nếu cố định mặt phẳng P , AB dịch chuyển sao cho phương AB được bảo toàn, thì $A'B'$ không đổi.

* Nếu cố định AB , còn P dịch chuyển sao cho phương của P không thay đổi, thì $A'B'$ không đổi.

Hình chiếu của đường thẳng trên một mặt phẳng được định nghĩa tương tự.

* Hình chiếu của một đường thẳng nói chung là một đường thẳng.

* Các đường thẳng song song, thì có hình chiếu song song.

* Phép chiếu vuông góc không bảo tồn góc giữa hai đường thẳng.

3. Hình chiếu của một hình phẳng và một vật thể.

Cho trước một mặt phẳng P , một hình phẳng Q . Tập hợp tất cả các hình chiếu của các điểm thuộc hình Q trên P gọi là hình chiếu của Q trên P .

* Hình chiếu của một hình phẳng nói chung là một hình phẳng. Khi phương của hình phẳng song song với phương chiếu, thì hình chiếu của nó nằm trên một đường thẳng.

* Nếu Q là đa giác n cạnh, thì hình chiếu của Q là đa giác có số cạnh bằng n , hay là một đoạn thẳng.

* Nếu gọi Q' là hình chiếu của Q trên P , α là góc tạo bởi P với mặt phẳng chứa Q thì :

$$dt\, Q' = dt\, Q \cdot \cos\alpha.$$

Hệ quả. * Nếu cố định Q còn dịch chuyển P sao cho phương của P không đổi, thì $dt\, Q'$ không đổi.

* Nếu cố định P còn dịch chuyển Q sao cho phương của Q không đổi, thì $dt\, Q'$ không đổi.

Tập hợp tất cả các hình chiếu của các điểm thuộc vật thể V trên mặt phẳng P gọi là hình chiếu của V trên P .

Hình chiếu của vật thể V trên P là một hình phẳng nào đó.

§2. Các bài toán hình học có liên quan đến phép chiếu

Ví dụ 1. Hình chiếu của một vật thể lên 2 mặt phẳng P và Q lần lượt là những hình tròn C_1, C_2 . Chứng minh rằng các hình tròn đó bằng nhau.

Giải : Gọi l là giao tuyến của P và Q (nếu P cắt Q), AB là một đường kính của đường tròn C_1 thuộc Q và $AB \parallel l$. Khi đó tồn tại trong vật thể V , 2 điểm A', B' nhận A, B làm các hình chiếu. Gọi D, C là hình chiếu của A', B' trên P . Dựng qua A và B hai mặt phẳng R_1, R_2 vuông góc với l , khi đó $R_1 \perp P$ và $R_2 \perp P$. Do R_1 và R_2 cùng vuông góc với Q nên R_1, R_2 đều chứa AA' và BB' . Vì thế D, C đều nằm trên giao của R_1, R_2 với P . Ngoài ra D và C còn nằm trong hình tròn C_2 thuộc P . Gọi d_1 là đường kính của hình tròn C_1 (nằm trong Q), d_2 là đường kính của hình tròn C_2 ta có :

$$CD \leq d_2 ; CD \geq d_1 \Rightarrow d_2 \geq d_1.$$

Lập luận tương tự ta có : $d_1 \geq d_2$.

Vậy $d_1 = d_2$.

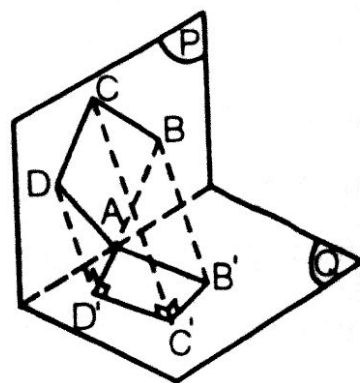
Trường hợp : $P \parallel Q$ hiển nhiên.

Ví dụ 2. Giả sử 2 mặt phẳng P, Q hợp với nhau một góc α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$). Trong P đặt một hình vuông cạnh bằng 1. Chứng minh rằng chu vi của hình chiếu hình vuông trên Q lớn nhất khi một đường chéo của hình vuông song song với Q .

Giải : Dịch chuyển hình vuông sao cho đỉnh A nằm trên giao tuyến của P và Q . Các đỉnh còn lại nằm về một phía với giao tuyến đó. Vì vậy A trùng với hình chiếu A' của nó.

Vì $AD \parallel BC$, $CD \parallel AB$ theo hệ quả của (*), nên $AD' \parallel B'C'$ và $AB' \parallel D'C'$, tứ giác $AD'B'C'$ là hình bình hành, chu vi của nó là :

$$2(AD' + AB').$$



Hình 162

Gọi M, N là hình chiếu của D, B trên giao tuyến, ta đặt $\widehat{DAM} = x$, ta có : $DM = \sin x$, $AM = \cos x$, $D'M = DM \cos \alpha$, $AD'^2 = AM^2 + D'M^2 = \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 \alpha$.

$$BN = \cos x, AN = \sin x, B'N = BN \cos \alpha,$$

$$AB'^2 = AN^2 + B'N^2 = \sin^2 x + \cos^2 x \cos^2 \alpha.$$

Xét tổng $AD' + AB'$. Để tổng này lớn nhất, ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của $(AD' + AB')^2$.

$$\begin{aligned} (AD' + AB')^2 &= AD'^2 + AB'^2 + 2AD' \cdot AB' = \\ &= 1 + \cos^2 \alpha + 2AD' \cdot AB' \end{aligned}$$

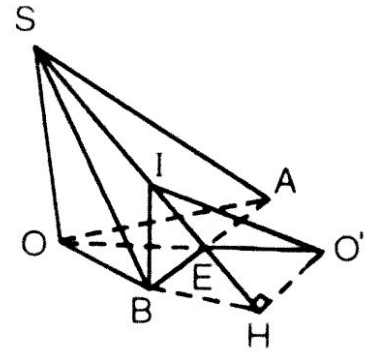
Tổng lớn nhất khi $AD' \cdot AB'$ lớn nhất.

Xét $AD' \cdot AB' = (\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 \alpha)(\sin^2 x + \cos^2 x \cos^2 \alpha)$. Vì $u + v = \text{const}$, nên tích $u \cdot v$ lớn nhất khi $u = v \Rightarrow x = 45^\circ$.

§3. Dùng phép chiếu vuông góc để giải một số bài toán hình không gian

Phép chiếu vuông góc có một số ứng dụng mà trong đó việc chọn mặt phẳng chiếu thích hợp sẽ rất quan trọng.

Ví dụ 3. Cho trong mặt phẳng P một tam giác vuông cân OAB ($\angle AOB = 1v$). Trên đường vuông góc tại O với (OAB) ta lấy một điểm S . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle SAB$. Chứng minh rằng khi S di động, thì I chạy trên một đường tròn cố định.



Hình 163

Giải : Gọi O' là điểm đối xứng với O qua trung điểm E của AB . Khi đó tứ giác $OA O'B$ là hình vuông. Chiếu O' lên (SAB) ; gọi hình chiếu của O' là H .

Vì $O'A = O'B$ và $HA = HB \Rightarrow H \in SE$.

Vì I là tâm vòng tròn nội tiếp $\triangle SAB$, nên AI là phân giác của SAB . Ta thấy rằng

$$\left. \begin{array}{l} O'A \perp OA \\ O'A \perp SO \end{array} \right\} \Rightarrow O'A \perp (SAO) \Rightarrow O'A \perp SA.$$

Trong mặt phẳng (SAB) , AH là hình chiếu của $O'A$, theo định lý 3 đường vuông góc, ta có $AH \perp SA$. Xét $\triangle SAB$ có $\widehat{SAI} = \widehat{BAI}$, tam giác vuông SAH có $\widehat{HAE} = \widehat{ASI}$, ngoài ra $\widehat{AIH} = \widehat{ASI} + \widehat{SAI}$.

Vậy $\widehat{AIH} = \widehat{IAH}$ và $\triangle AHI$ cân tại $H \Rightarrow HI = HA \Rightarrow O'I = O'A$.

Như vậy : $O'I$ có độ dài không đổi, O' cố định, $I \in (SOE)$ cố định, nên I nằm trên vòng tròn tâm O' bán kính bằng OA , trong mặt phẳng SOE .

Ví dụ 4. Như ta biết tất cả các đường thẳng đi qua đỉnh của một tứ diện và trọng tâm của mặt đối diện gặp nhau tại một điểm. Điểm đó ta gọi là trọng tâm của tứ diện.

Giả sử G là trọng tâm tứ diện $A_1B_1C_1D_1$. Một đường thẳng l qua G cắt các mặt (hoặc phần ngoài của các mặt đó) của tứ diện đó tại các điểm A, B, C, D ($A \in (B_1C_1D_1)$; $B \in (A_1C_1D_1)$...). Chứng minh rằng nếu B, C, D nằm khác phía với A đối với G , thì ta có :

$$\frac{1}{GA} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} ;$$

nếu D, C nằm khác phía với A, B đối với G , thì :

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} = \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD} .$$

Giải : Gọi $A_1B_1C_1D_1$ là tứ diện đang xét có trọng tâm G , l cắt các mặt hoặc phần ngoài các mặt tại các điểm A, B, C, D ta thấy rằng :

$$V_{GA_1B_1C_1} = V_{GA_1C_1D_1} = V_{GA_1B_1D_1} = \frac{1}{4} V,$$

trong đó V là thể tích tứ diện $A_1B_1C_1D_1$.

Gọi P là mặt phẳng vuông góc với l , chiếu $\Delta B_1C_1D_1$ lên P , gọi hình chiếu của nó là $\Delta B_2C_2D_2$. Giả sử h là khoảng cách từ G đến $(B_1C_1D_1)$, ta có :

$$\frac{1}{4} V = V_{GB_1C_1D_1} = \frac{1}{3} h \cdot dt(B_1C_1D_1). \quad (1)$$

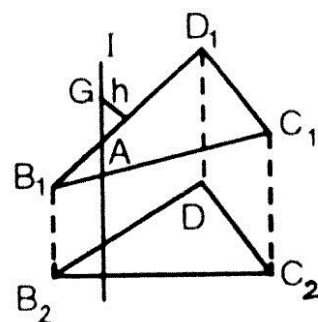
Mặt khác $h = GA \cdot \cos \alpha$ (α là góc tạo bởi P với $(B_1C_1D_1)$), còn

$$dt(B_1C_1D_1) = \frac{dt(B_2C_2D_2)}{\cos \alpha} . \quad (2)$$

Bây giờ ta sẽ chiếu tất cả các mặt còn lại của tứ diện lên P , các đỉnh A_1, B_1, C_1, D_1 thành A_2, B_2, C_2, D_2 .

Nếu A nằm khác phía với B, C, D đối với G , thì l chỉ cắt $(B_1C_1D_1)$ tại điểm A_1 nằm trong $\Delta B_1C_1D_1$. Gọi A' là giao điểm của P và l , khi đó A' là hình chiếu của A trên P , A' phải nằm

trong $\Delta B_2C_2D_2$. Mặt khác, A' cũng là hình chiếu của B, C, D trên P , nên hình chiếu của mọi điểm thuộc $\Delta A_1B_1C_1$ nằm cùng phía với A' đối với B_2C_2 , nên A_2 nằm cùng phía với A' đối với B_2C_2 . Lập luận tương tự, A_2 cùng phía với A' đối với C_2D_2 và D_2B_2 nên A_2 ở trong $\Delta B_2C_2D_2$.



Hình 164

Ta có hệ thức :

$$dt(A_2B_2C_2) + dt(A_2C_2D_2) + dt(A_2D_2B_2) = dt(B_2C_2D_2).$$

Theo (1) và (2) thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} V &= \frac{1}{3} dt(B_2C_2D_2) \cdot GA = \frac{1}{3} dt(C_2A_2D_2) \cdot GB = \\ &= \frac{1}{3} dt(C_2A_2B_2) \cdot GD = \frac{1}{3} dt(D_2A_2B_2) \cdot GC \end{aligned}$$

Vậy
$$\frac{1}{4} \frac{V}{GA} = \frac{1}{4} \frac{V}{GB} + \frac{1}{4} \frac{V}{GC} + \frac{1}{4} \frac{V}{GD}$$

hay
$$\frac{1}{GA} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}.$$

Nếu A, B nằm khác phía với C, D đối với G , thì A_1 nằm ngoài $\Delta B_1C_1D_1$, tức là A_2 nằm ngoài $\Delta B_2C_2D_2$. Ta nhận thấy A_2 nằm trong $\Delta D_2B_2C_2$ khi đó ta có :

$$dt(A_2C_2D_2) + dt(C_2D_2B_2) = dt(A_2B_2C_2) + dt(A_2B_2D_2)$$

hay
$$\frac{1}{4} \frac{V}{GA} + \frac{1}{4} \frac{V}{GB} = \frac{1}{4} \frac{V}{GC} + \frac{1}{4} \frac{V}{GD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} = \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}$$

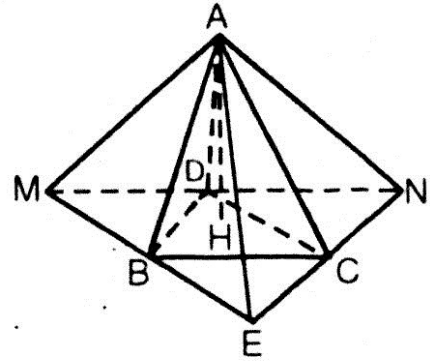
Ví dụ 5. α, β, γ là những góc nhị diện kề với một mặt của tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau.

Chứng minh rằng

$$a) \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{27};$$

$$2) \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geq \frac{1}{3}.$$

Giải : Giả sử ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (BCD).



Hình 165

Ta nhận xét rằng nếu kẻ qua B, C, D những đường thẳng song song với các cạnh của $\triangle BCD$, thì hình chóp AMNE có các góc phẳng tại A vuông, nên H nằm trong $\triangle MNE$.

Nếu $H \in \triangle BCD$ ta có :

$$dt(CBH) = dt(ABC) \cdot \cos\alpha = S \cdot \cos\alpha;$$

$$dt(BDH) = dt(ABD) \cdot \cos\beta = S \cdot \cos\beta;$$

$$dt(CDH) = dt(ADC) \cdot \cos\gamma = S \cdot \cos\gamma;$$

$$dt(CBH) + dt(BDH) + dt(CDH) = S(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

$$\Rightarrow S = S(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi (trong đó $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$, $\cos\gamma > 0$) ta được

$$\sqrt[3]{\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma} \leq \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{27}.$$

Nếu $H \notin \triangle ABC \Rightarrow H$ nằm trong một trong 3 tam giác còn lại : $\triangle MBD$, $\triangle NDC$ và $\triangle EBC$. Khi đó có 1 góc trong các góc α , β , γ từ $\Rightarrow \cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ có 1 giá trị âm, 2 giá trị dương, nên hiển nhiên

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \leq \frac{1}{27}.$$

2. Học sinh tự làm.

BAI TẬP CHƯƠNG VII

1. Cho khối lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ và gọi O là giao điểm các đường chéo của lập phương, d là đường thẳng đi qua O . Chứng minh rằng tổng các bình phương khoảng cách từ các đỉnh của lập phương đến d không phụ thuộc cách chọn d .

2. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, ngoài ra đặt $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$. Tìm một liên hệ giữa x , y , z để nhị diện kề với mặt (ABC) là những góc nhọn.

3. Chứng minh rằng tổng bình phương diện tích hình chiếu của các mặt của một hình hộp chữ nhật lên một mặt phẳng không phụ thuộc vào vị trí của mặt phẳng này, khi và chỉ khi hình hộp đó là lập phương.

4. Bên trong một hình lập phương ta đặt một vật thể lồi, mà hình chiếu của vật thể lên các mặt lập phương, trùng với các mặt đó của hình lập phương. Chứng minh rằng thể tích vật thể không bé hơn $1/3$ thể tích lập phương.

5. Chứng minh rằng tổng bình phương độ dài các hình chiếu của các cạnh của hình lập phương trên một mặt phẳng không phụ thuộc vị trí của mặt phẳng đó trong không gian.

6. Hai mặt phẳng P và Q tạo với nhau một góc nhọn, trong P đặt một tam giác đều cạnh a . Chứng minh rằng tổng bình phương các độ dài của các hình chiếu các cạnh tam giác trên Q không phụ thuộc vị trí tam giác trong P .

7. Trong mặt phẳng P cho một đường tròn (O) , S là điểm không thuộc P , có hình chiếu H trên P . A là điểm di động trên vòng tròn (O) , M là hình chiếu của H trên SA . Chứng minh rằng M nằm trong một mặt phẳng cố định.

Chỉ dẫn và đáp số bài tập

CHƯƠNG VII

2. Kẻ qua A, B, C các đường thẳng song song với các cạnh ΔABC , chúng cắt nhau tại A_1, B_1, C_1 .

Để chứng minh rằng $DA_1B_1C_1$ là hình chóp có 3 góc phẳng ở đỉnh D vuông. Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng ABC. H là trực tâm $\Delta A_1B_1C_1$.

Để 3 nhị diện (AB), (BC), (AC) nhọn, cần và đủ là H ở trong $\Delta ABC \Leftrightarrow$ khoảng cách từ H tới 3 cạnh $\Delta A_1B_1C_1$ bé hơn nửa đường cao tương ứng của tam giác đó và dẫn đến hệ điều kiện :

$$\begin{cases} \frac{1}{DA_1^2} + \frac{1}{DB_1^2} > \frac{1}{DC_1^2}, \\ \frac{1}{DC_1^2} + \frac{1}{DA_1^2} > \frac{1}{DB_1^2}, \\ \frac{1}{DC_1^2} + \frac{1}{DB_1^2} > \frac{1}{DA_1^2}, \end{cases}$$

trong đó : $DA_1^2 = 2(x^2 + y^2 - z^2),$

$$DB_1^2 = 2(y^2 + z^2 - x^2),$$

$$DC_1^2 = 2(x^2 + z^2 - y^2).$$

3. Điều kiện cần : Nếu hình hộp là lập phương, thì tổng bình phương diện tích hình chiếu của các mặt lên một mặt phẳng P nào đó sẽ có giá trị không đổi.

Thật vậy, do các mặt song song có diện tích hình chiếu trên P bằng nhau. Như vậy ta chỉ cần nghiệm cho trường hợp 3 mặt xuất phát từ 1 đỉnh.

Giả sử P chứa đỉnh A chung cho 3 mặt này. Gọi α, β, γ là 3 góc hợp bởi P với 3 mặt đó. Khi đó tổng bình phương hình chiếu 3 mặt trên P là $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

Ở đây xem diện tích mặt lập phương là 1 và dễ chứng minh rằng $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

Điều kiện đủ : Hãy chọn P là mặt phẳng song song với từng mặt của hình hộp chữ nhật. Từ đó suy ra diện tích các mặt bằng nhau.

4. Từ giả thiết bài toán, ta suy ra rằng trên các cạnh lập phương tồn tại ít nhất một điểm chung thuộc vật thể đã cho.

Xét khối đa diện tạo bởi 12 điểm trên 12 cạnh lập phương. Do vật thể lồi, nên thể tích vật thể lớn hơn thể tích khối 12 đỉnh.

Thể tích khối 12 đỉnh lớn hơn hoặc bằng $\frac{1}{3}$ thể tích lập phương.

5. Chỉ cần xét tổng bình phương hình chiếu của 3 cạnh xuất phát từ 1 đỉnh A.

Tính tiền mặt phẳng chiếu P về đỉnh A. Từ A kẻ nửa đường thẳng $AX \perp P$. Gọi α, β, γ là góc giữa AX với 3 cạnh và tổng bình phương hình chiếu này bằng :

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma ; \quad (1)$$

xem cạnh lập phương là 1, dễ chứng minh rằng tổng (1) bằng 2.

6. Giả sử đỉnh A của $\triangle ABC$ thuộc giao tuyến P và Q. B', C' là hình chiếu của B, C trên Q. Đặt $x = (\widehat{BA}, d)$, kẻ $BM \perp d$, $CN \perp d$. Nối M và N với B', C' và biểu thị tổng bình phương các cạnh $\triangle AB'C'$ theo α, β, γ . (α là góc tạo bởi P và Q).

7. Gọi B là giao điểm của OH với vòng tròn (O) (B khác phía với H đối với O). Dựng $d \perp P$ tại O, I là giao của mặt phẳng

trung trực với d , S' là điểm đối xứng của S qua I . Gọi H_0 là hình chiếu của H trên SS' . H_0 cố định, dễ chứng minh rằng $SS' \perp (HMH_0)$. Vậy (HMH_0) là mặt phẳng cố định phải tìm.

CHƯƠNG VIII

PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH

Phương pháp giải một số bài toán hình học không gian dựa vào khái niệm thể tích được gọi là phương pháp thể tích. Cơ sở của phương pháp đó là :

* Công thức tính thể tích của một số đa diện đã học như : hình chóp, lăng trụ...

* Nếu một đa diện được chia thành nhiều đa diện nhỏ, thì thể tích đa diện đó bằng tổng thể tích các đa diện nhỏ.

§1. Chứng minh các hệ thức trong các hình

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$, gọi h_1, h_2, h_3, h_4 lần lượt là khoảng cách từ các đỉnh A, B, C, D đến các mặt đối diện. Giả sử M là một điểm nằm trong tứ diện đó. Gọi x, y, z, t là khoảng cách tương ứng từ M đến các mặt $(BCD), (ACD), (ABD)$ và (ABC) . Chứng minh rằng :

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} + \frac{t}{h_4} = 1.$$

Giải : Nối M với các đỉnh của tứ diện ; khi đó tứ diện $ABCD$ được chia thành 4 hình chóp. Ta có :

$$V_{ABCD} = V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC}$$

Chia cả hai vế của hệ thức trên cho V_{ABCD} ta được

$$1 = \frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABD}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}}$$

Ta thấy rằng : $V_{MBCD} = \frac{1}{3} dt(BCD) \cdot x,$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} dt(BCD) \cdot h_1,$$

vậy :

$$\frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{x}{h_1}.$$

Tương tự :

$$\frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} = \frac{y}{h_2} ; \frac{V_{MABC}}{V_{ABCD}} = \frac{t}{h_3} ; \frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}} = \frac{t}{h_4}.$$

Vậy :

$$\frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} + \frac{t}{h_4} = 1.$$

Ví dụ 2. Trên đáy ABC của tứ diện OABC ta lấy một điểm M. Các đường thẳng song song với các cạnh OA, OB, OC đi qua M, cắt các mặt OBC, OCA, OAB lần lượt tại A₁, B₁, C₁. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA_1}{OA} + \frac{MB_1}{OB} + \frac{MC_1}{OC} = 1.$$

Giải : Nối M với các đỉnh O, A, B, C. Khi đó

$$V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOCA}.$$

Chia hai vế cho V_{OABC} , ta được :

$$1 = \frac{V_{MOAB}}{V_{OABC}} + \frac{V_{MOBC}}{V_{OABC}} + \frac{V_{MOCA}}{V_{OABC}}$$

Ta xét tỷ số :

$$\frac{V_{MOBC}}{V_{OABC}}$$

Ta kẻ AH ⊥ (OBC), MK ⊥ (OBC).

Khi đó AH // MK.

Hai tam giác OAH và A_1MK đồng dạng nên :

$$\frac{OA}{MA_1} = \frac{AH}{MK}$$

Vì :

$$V_{MOBC} = \frac{1}{3} dt(OBC) \cdot MK,$$

$$V_{OABC} = \frac{1}{3} dt(OBC) \cdot AH$$

nên :

$$\frac{V_{MOBC}}{V_{OABC}} = \frac{MK}{AH} = \frac{MA_1}{OA}.$$

Tương tự ta có :

$$\frac{V_{MOAB}}{V_{OABC}} = \frac{MC_1}{OC}; \quad \frac{V_{MOCA}}{V_{OABC}} = \frac{MB_1}{OB}.$$

Hình 166

Vậy :

$$\frac{MA_1}{OA} + \frac{MB_1}{OB} + \frac{MC_1}{OC} = 1.$$

Ví dụ 3. Giả sử M là một điểm nằm trong tứ diện ABCD. Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt các mặt đối diện tại A_1 ; B_1 ; C_1 ; D_1 . Chứng minh rằng :

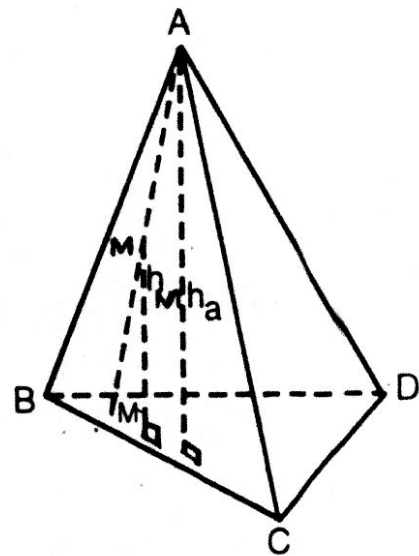
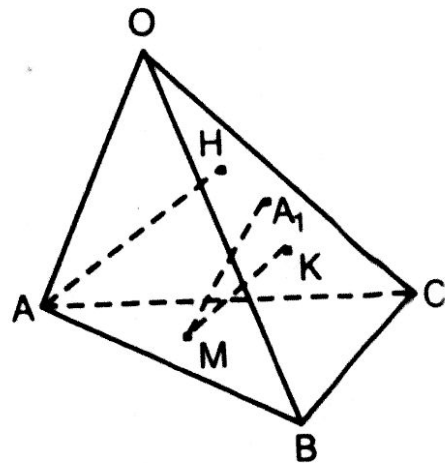
$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} + \frac{MD_1}{DD_1} = 1.$$

Giải : Nối M với 4 đỉnh của tứ diện ABCD, ta có :

Hình 167

$$V = V_{MBCD} + V_{MACD} + V_{MABD} + V_{MABC} \Rightarrow$$

$$1 = \frac{V_{MBCD}}{V} + \frac{V_{MACD}}{V} + \frac{V_{MABD}}{V} + \frac{V_{MABC}}{V}$$



Xét tỷ số : $\frac{V_{MBCD}}{V}$

Ta có : $V_{MBCD} = \frac{1}{2} dt(BCD) \cdot h_M$ (h_M là đường cao của hình chóp MBCD hạ từ M).

$V = \frac{1}{3} h_A \cdot dt(BCD)$ (h_A - đường cao của tứ diện ABCD hạ từ A). Vậy :

$$\frac{V_{MBCD}}{V} = \frac{h_M}{h_A} \quad \text{Vì } h_M \parallel h_A, \text{ nên } \frac{h_M}{h_A} = \frac{MA_1}{AA_1}.$$

Tương tự :

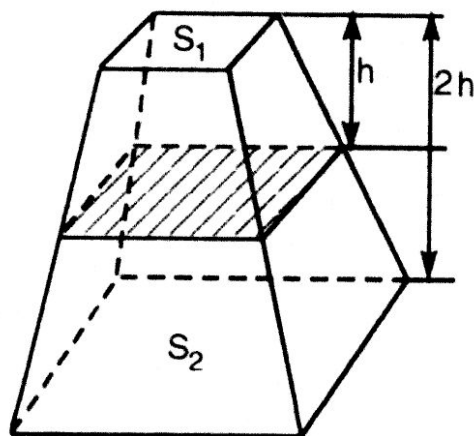
$$\frac{V_{MACD}}{V} = \frac{MB_1}{BB_1}; \quad \frac{V_{MABD}}{V} = \frac{MC_1}{CC_1}; \quad \frac{V_{MABC}}{V} = \frac{MD_1}{DD_1}.$$

Từ các hệ thức đó dễ dàng suy ra điều cần chứng minh.

§2. Tính các yếu tố khác trong đa diện, tính tỷ số thể tích

Ví dụ 4. Cho biết diện tích 2 đáy của một hình chóp cắt là S_1, S_2 . Tính diện tích thiết diện trung bình tức là thiết diện đi qua điểm giữa một cạnh bên và song song với đáy hình chóp cắt.

Giải : Ta ký hiệu $2h$ là khoảng cách giữa hai đáy S_1, S_2 , X là diện tích thiết diện, V là thể tích hình chóp cắt đã cho ; V_1, V_2 là thể tích 2 đa diện tạo thành bởi thiết diện.



Hình 168

Theo công thức tính thể tích hình chóp cụt, ta có :

$$V = \frac{2h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) ;$$

$$V_1 = \frac{h}{3} (S_1 + X + \sqrt{S_1 X}) ;$$

$$V_2 = \frac{h}{3} (S_2 + X + \sqrt{S_2 X}).$$

Vì $V = V_1 + V_2$ nên

$$\frac{2h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + 2X + \sqrt{XS_1} + \sqrt{XS_2}),$$

hay $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2} = 2X + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{X},$

hay $2X + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{X} - (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = 0.$

Đặt : $t = \sqrt{X}$, $t \geq 0$, ta có :

$$2t^2 + (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})t - (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2 = 0.$$

$$\Delta = 9(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2. \text{ Vậy : } t_1 = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2},$$

$$t_2 = -(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}). \text{ Nghiệm } t_2 < 0, \text{ nên ta loại bỏ.}$$

Vậy

$$\sqrt{X} = \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}}{2}, \text{ hay } X = \frac{1}{4} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Ví dụ 5. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Trên các cạnh SA, SB, SC ta chọn lần lượt các điểm A_1, B_1, C_1 sao cho :

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{2}{3} ; \frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2} ; \frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{3}.$$

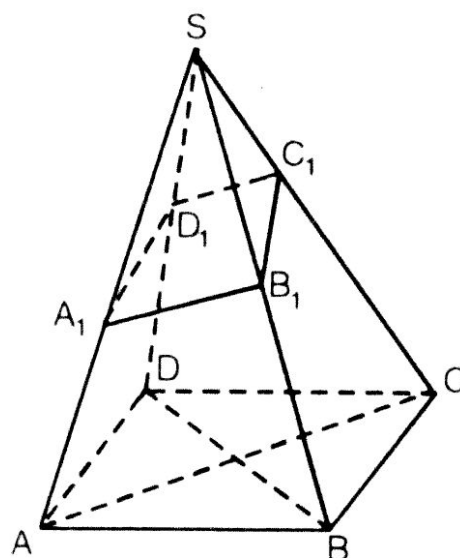
Mặt phẳng đi qua $A_1 ; B_1 ; C_1$
cắt SD tại D_1 .

a) Tính tỷ số $\frac{SD_1}{SD}$.

b) Cho biết thể tích V của
 $SABCD$. Tính thể tích của hình
chóp $SA_1B_1C_1D_1$.

Giải : a) Trước hết ta thấy
rằng :

$$\begin{aligned} V_{SABC} &= V_{SBCD} = V_{SCDA} = \\ &= V_{SDAB} = \frac{V}{2} \end{aligned}$$



Hình 169

Mặt khác ta có :

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{9} ; \quad (1)$$

$$\frac{V_{SA_1D_1C_1}}{V_{SADC}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SD_1}{SD} \cdot \frac{SC_1}{SC} = \frac{2}{9} \cdot \frac{SD_1}{SD} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) ta được :

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1D_1}}{\frac{1}{2} V} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{SD_1}{SD} \quad (3)$$

Tương tự :

$$\frac{V_{SA_1B_1D_1}}{V_{SABD}} = \frac{SA_1}{SA} \cdot \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SD_1}{SD} ; \quad (4)$$

$$\frac{V_{SB_1C_1D_1}}{V_{SBCD}} = \frac{SB_1}{SB} \cdot \frac{SC_1}{SC} \cdot \frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{6} \cdot \frac{SD_1}{SD} \quad (5)$$

Cộng vế với vế của (4) và (5) ta được :

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1D_1}}{(1/2)V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{SD_1}{SD} \quad (6)$$

Từ (3) và (6) ta có

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{SD_1}{SD} = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{SD_1}{SD}$$

Do đó

$$\frac{SD_1}{SD} = \frac{2}{5} \quad (7)$$

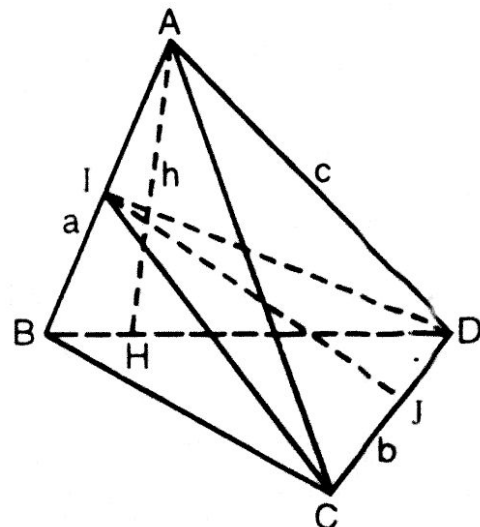
b) Từ (6) và (7) ta có :

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1D_1}}{\frac{1}{2}V} = \frac{1}{5}$$

Vậy :

$$V_{SA_1B_1C_1D_1} = \frac{V}{10}$$

Ví dụ 6. Cho tứ diện ABCD có $AB = a$, $CD = b$, các cạnh còn lại bằng c . Tính khoảng cách từ A đến mặt (BCD).



Hình 170

Giải : Gọi h là khoảng cách từ A đến (BCD), V là thể tích tứ diện ABCD, khi đó :

$$V = \frac{1}{3} dt(BCD) \cdot h.$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD ta thấy $AB \perp (ICD)$, và vì $IA = IB$, nên

$$V = 2V_{AICD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot AI \cdot dt(ICD).$$

$$\text{Ta có : } \frac{1}{3} dt(BCD) \cdot h = \frac{AB}{3} dt(ICD), \text{ vậy } h = \frac{AB \cdot dt(ICD)}{dt(BCD)}.$$

$$\text{Tính } dt(BCD) : dt(BCD) = \frac{1}{2} IJ \cdot CD,$$

$$IJ^2 = AJ^2 - AI^2 = c^2 - \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4} = c^2 - \frac{b^2 + a^2}{4}$$

$$\Rightarrow IJ = \frac{1}{2} \sqrt{4c^2 - (b^2 + a^2)};$$

$$dt(BCD) = \frac{b}{4} \sqrt{4c^2 - (b^2 + a^2)};$$

$$dt(BCD) = \frac{1}{2} BJ \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \sqrt{c^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{b}{4} \sqrt{4c^2 - b^2}.$$

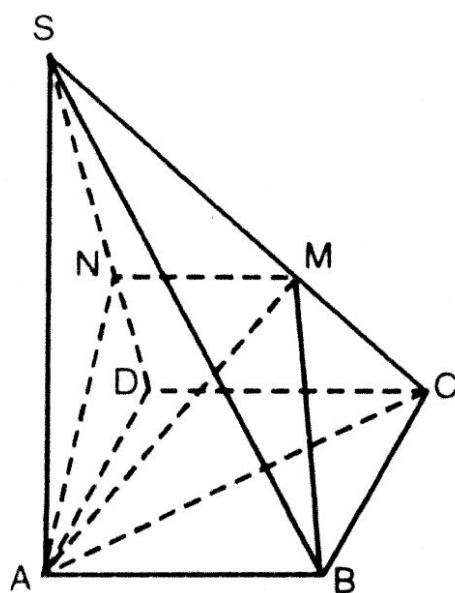
$$\text{Vậy } h = \frac{a \cdot (b/4) \sqrt{4c^2 - b^2 - a^2}}{\frac{b}{4} \sqrt{4c^2 - b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{4c^2 - b^2 - a^2}}{\sqrt{4c^2 - b^2}}.$$

Ví dụ 7. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông ABCD và cạnh $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng qua AB cắt hình chóp SABCD thành hai phần tương đương.

Tính tỉ số độ dài của 2 đoạn thẳng do mặt phẳng thiết diện cắt DC.

Giải : Giả sử mặt phẳng qua AB cắt (SCD) theo giao tuyến MN (M trên SC, N trên SD), khi đó $MN \parallel CD$.

Gọi V là thể tích hình chóp SABCD, V_1 là thể tích hình chóp SABMN.



Hình 171

Theo giả thiết $V_1 = \frac{1}{2} V$.

Xét hình chóp SABM :

$$\frac{V_{SABM}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SC} \quad (1)$$

Xét hình chóp SADC :

$$\frac{V_{SAMN}}{V_{SADC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \left(\frac{SM}{SC} \right)^2 \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2), ta được :

$$\frac{V_1}{\frac{1}{2} V} = \frac{SM}{SC} + \left(\frac{SM}{SC} \right)^2 = 1, \text{ (vì } V_1 = \frac{1}{2} V \text{)}$$

Đặt $\frac{SM}{SC} = x$, $0 < x < 1$, ta có :

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} ; x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} ; x_2 < 0, \text{ nên ta loại.}$$

Ta thấy nghiệm $x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ thích hợp, vì

$$0 < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1, \text{ tức là : } \frac{SM}{SC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

§3. Giải các bài toán quỹ tích và cực trị

Ví dụ 8. Cho góc tam diện Oxyz. Trên các cạnh Ox, Oy, Oz ta chọn các điểm cố định A, B, C. Tìm quỹ tích các điểm M trong góc tam diện sao cho thể tích của đa diện OABCM có giá trị k^3 ($k > 0$).

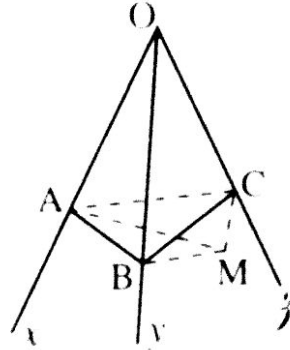
Giải : Chứng minh thuận :

Giả sử $V_{OABC} < k^3$, và M là điểm tùy ý nằm trong góc tam diện Oxyz, khi đó

$$V_{MABC} = k^3 - V_{OABC}$$

Gọi h là khoảng cách từ M đến (ABC) ta có :

$$h = \frac{3(k^3 - V_{OABC})}{dt(ABC)}$$



Hình 172

Vì V_{OABC} và $dt(ABC)$ không đổi, nên h không đổi, nhưng mặt phẳng (ABC) cố định nên M nằm trong mặt phẳng song song với (ABC), cách (ABC) một đoạn bằng h. Gọi A', B', C' là giao điểm của mặt phẳng đó với các cạnh Ox, Oy, Oz. Vậy :

Quỹ tích của M là hình tam giác A'B'C' (kể cả biên).

Đảo. Bạn đọc tự chứng minh.

Biện luận. Nếu $V_{OABC} < k^3$, thì quỹ tích của M là tam giác A'B'C', ảnh của ABC trong phép vị tự tâm O hệ số vị tự lớn hơn 1 ($OA'/OA < 1$).

Nếu $V_{OABC} = k^3$, quỹ tích của M chính là tam giác ABC. Nếu $V_{OABC} > k^3$, quỹ tích của M được xét một cách tương tự cũng là ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm O với tỷ số vị tự bé hơn 1.

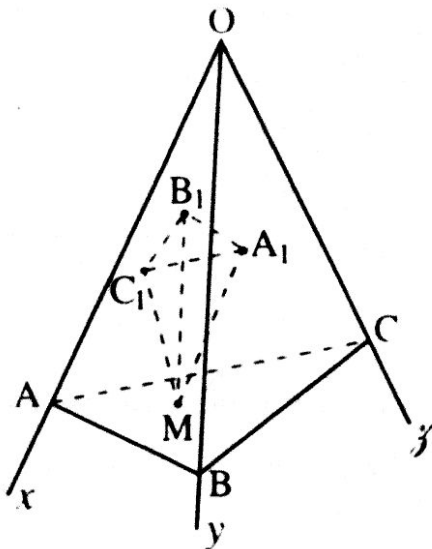
Tóm lại quỹ tích của M là tam giác A'B'C', ảnh của tam giác ABC trong phép vị tự tâm O tỷ số $r > 0$.

Ví dụ 9. Cho trước góc tam diện Oxyz, và điểm M cố định trong góc đó. Mặt phẳng P đi qua M cắt Oxyz thành tứ diện. Tìm vị trí của P để tứ diện có thể tích bé nhất.

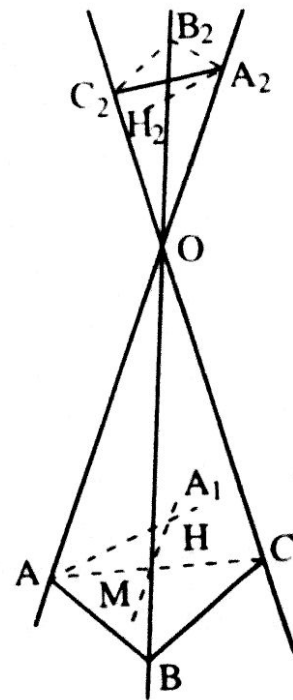
Giải : Giả sử P cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Ta kẻ qua M các đường thẳng song song với Ox, Oy, Oz và chúng cắt các mặt của góc tam diện tương ứng tại A_1, B_1, C_1 (xem hình vẽ).

Ta sẽ chứng minh rằng :

$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC}.$$



Hình 173



Hình 174

Trên các phần kéo dài về phía bên kia O của các tia Ox, Oy, Oz ta đặt $OA_2 = MA_1$, $OB_2 = MB_1$, $OC_2 = MC_1$. Khi đó $A_1A_2 \parallel OM$, $B_1B_2 \parallel OM$, $C_1C_2 \parallel OM$. Nếu thực hiện phép tịnh tiến theo MO, thì tứ diện $MA_1B_1C_1$ trùng với tứ diện $OA_2B_2C_2$, nên

$$V_{OA_2B_2C_2} = V_{MA_1B_1C_1}.$$

Mặt khác

$$\frac{V_{OA_2B_2C_2}}{V_{OABC}} = \frac{\frac{1}{3} dt(OB_2C_2) \cdot A_2H_2}{\frac{1}{3} dt(OBC) \cdot AH}$$

(A_2H_2 , AH là các đường vuông góc hạ từ A_2 và A đến mặt phẳng (OBC)). Ta có :

$$\frac{dt(OB_2C_2)}{dt(OBC)} = \frac{\frac{1}{2} OB_2 \cdot OC_2 \sin \widehat{B_2OC_2}}{\frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin \widehat{BOC}} = \frac{OB_2}{OB} \cdot \frac{OC_2}{OC}$$

và
$$\frac{A_2H_2}{AH} = \frac{OA_2}{OA} \cdot \text{Vây} \frac{V_{OA_2B_2C_2}}{V_{OABC}} = \frac{OA_2}{OA} \cdot \frac{OB_2}{OB} \cdot \frac{OC_2}{OC}$$

hay
$$\frac{V_{MA_1B_1C_1}}{V_{OABC}} = \frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC}$$

Vì $V_{MA_1B_1C_1}$ không đổi nên V_{OABC} phụ thuộc vào tích số $\frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC}$, nên V_{OABC} bé nhất khi tích $\frac{MA_1}{OA} \cdot \frac{MB_1}{OB} \cdot \frac{MC_1}{OC}$ lớn nhất.

Theo ví dụ 2 ở (1) ta có

$$\frac{MA_1}{OA} + \frac{MB_1}{OB} + \frac{MC_1}{OC} = 1.$$

Vậy tích lớn nhất khi 3 số hạng bằng nhau, tức là :

$$\frac{MA_1}{OA} = \frac{MB_1}{OB} = \frac{MC_1}{OC} = \frac{1}{3}.$$

Cách tìm :

Trên tia Ox, Oy lấy các điểm A, B sao cho :

$$OA = 3MA_1, OB = 3MB_1.$$

Mặt phẳng qua A, B, M là mặt phẳng cần tìm.

BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

1. Cho tứ diện ABCD và M là điểm nằm trong tứ diện đó. Chứng minh rằng nếu tổng các khoảng cách từ M tới các mặt của tứ diện có giá trị không đổi, thì diện tích các mặt bằng nhau.

2. Cho tứ diện ABCD và M là điểm nằm trong tứ diện đó. Các mặt phẳng ABM, BCM, CAM cắt cạnh CD, AD và BD lần lượt tại C_1 , A_1 , B_1 . DM cắt mặt đối diện tại D_1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{DA_1}{AA_1} + \frac{BB_1}{BB_1} + \frac{DC_1}{CC_1} = \frac{DM}{MD_1}.$$

3. Trong góc tam diện Oxyz chọn trước điểm M. Mặt phẳng P qua M, cắt các cạnh của góc tam diện tại A, B, C. Chứng minh rằng :

$$\frac{V_{OABC}^2}{V_{OMBC} \cdot V_{OMAB} \cdot V_{OMAC}}$$

có giá trị không đổi.

4. Trong tứ diện ABCD chọn trước điểm M. Chứng minh rằng :

$$\frac{V_{MABD} + V_{MCBD} + V_{MCDA}}{V_{MCAB}} = \frac{DM}{D_1M'}$$

D_1 là giao điểm DM với mặt đối diện.

5. Cho hình hộp $ABCD A'B'C'D'$. Các mặt là những hình thoi bằng nhau cạnh a và góc nhọn bằng α .

1) Tính thể tích hình hộp.

2) Tính khoảng cách từ A đến mặt $A'BD$ với giả thiết rằng tại A có 3 góc phẳng nhọn.

6. Cho tứ diện $ABCD$, mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh CD cắt AB tại I .

1) Chứng minh rằng $\frac{IA}{IB} = \frac{V_{AICD}}{V_{BICD}} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$.

2) Giả sử $IA = IB$; $AB \perp CD$. Chứng minh rằng $AB \perp (ICD)$.

7. Cho tứ diện $ABCD$, trong tam giác BCD chọn điểm M và kẻ qua M các đường song song với các cạnh AB , AC , AD cắt các mặt ACD , ABD và ABC tại A_1 , B_1 , C_1 . Tìm vị trí M để thể tích hình tứ diện $MA_1B_1C_1$ cực đại.

CHƯƠNG IX

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC CÓ NHIỀU CÁCH GIẢI

Trong chương này chúng tôi giới thiệu với bạn đọc về các phương pháp giải cho một bài toán. Mục đích chính của chương là :

- * Giúp bạn đọc biết thêm được các cách giải một số bài toán hình học ;

- * Cách suy nghĩ, phân tích một đề bài ;

- * Vận dụng các kiến thức đã có một cách thích hợp.

Những bài toán đề cập trong chương này có thể có những bài bạn đã biết, có những bài bạn chưa biết. Điều đó không quan trọng. Cái chính là nhấn mạnh cách suy nghĩ, cách lập luận chặt

chế... Sau mỗi bài làm mẫu, chúng tôi có đặt ra một số bài tương tự để các bạn làm nhằm nâng cao sự hiểu biết cho các bạn.

Bài 1. Hình chóp $SABC$ có 3 góc phẳng tại S vuông. H là trực tâm của $\triangle ABC$.

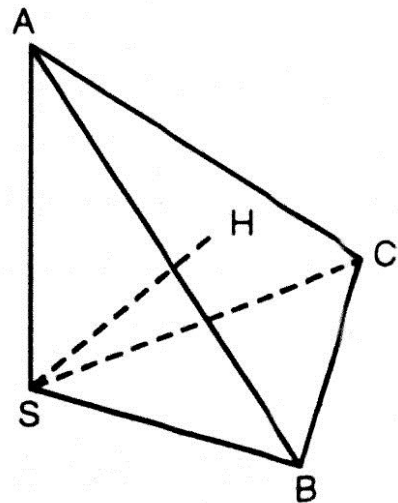
- 1) Chứng minh rằng $SH \perp mp(ABC)$.
- 2) Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.
- 3) Chứng minh rằng :

$$dt \triangle ABC \geq \frac{1}{\sqrt{3}} (dt \triangle SAB + dt \triangle SAC + dt \triangle SBC).$$

Giải : 1) Cách 1.

Thật vậy, $AC \perp BH$, $SB \perp mp(SAC)$, nên $SB \perp AC$, suy ra $AC \perp mp(SBH) \Rightarrow AC \perp SH$. Tương tự ta được $AB \perp SH$.

Cách 2. Xem SH là giao tuyến của hai mặt phẳng : SBH và SCH , ta nhận thấy rằng $mp(SBH) \perp mp(ABC)$, $mp(SCH) \perp mp(ABC)$, từ đó suy ra $SH \perp mp(ABC)$.



2) Ta chỉ cần chứng minh A nhọn.

Hình 175

Cách 1. Dựa vào nhận xét sau đây :

Trong $\triangle ABC$ nếu trung tuyến $AM > \frac{1}{2} BC$ thì A nhọn. Áp dụng vào bài toán trên ta thấy $SA \perp mp(SBC)$, nên $\triangle SAM$ vuông tại S và $AM > SM$.

Trong $\triangle SBC$ vuông tại S , có $SM = \frac{1}{2} BC$. Vậy

$$AM > \frac{1}{2} BC.$$

Cách 2. Áp dụng định lý hàm cosin, ta có

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}$$

A nhọn khi $\cos A > 0$. Suy ra $AB^2 + AC^2 - BC^2 > 0$. Vậy ta chỉ cần nghiệm lại bất đẳng thức này. Thật vậy :

$$AB^2 = SA^2 + SB^2, AC^2 = SA^2 + SC^2, BC^2 = SB^2 + SC^2.$$

$$\text{Ta có } AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2SA^2 > 0.$$

3) Đặt $X = dt \Delta SAB$; $Y = dt \Delta SAC$; $Z = dt \Delta SBC$. Ta cần chứng minh rằng : $(dt \Delta ABC)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$.

Cách 1. Dựa vào hệ thức sau đây :

$$(dt \Delta SAB)^2 = dt \Delta AHB \cdot dt \Delta ABC \quad (*)$$

(bạn đọc tự chứng minh).

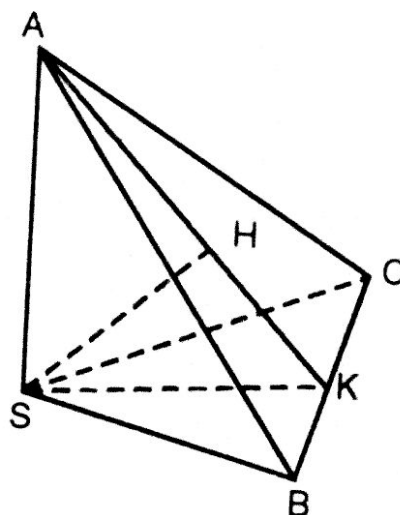
Vì ΔABC có 3 góc nhọn, nên H ở trong tam giác.

Vậy : $dt \Delta AHB + dt \Delta AHC + dt \Delta BHC = dt \Delta ABC$. Nhân cả 2 vế của đẳng thức với $dt \Delta ABC$ và áp dụng hệ thức (*), ta suy ra điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi K là giao điểm của AH với BC. Khi đó $SK \perp BC$.

$$\begin{aligned} (dt \Delta ABC)^2 &= \frac{1}{4} BC^2 \cdot AK^2 \\ &= \frac{1}{4} BC^2 (SA^2 + SK^2) \\ &= \frac{1}{4} BC^2 \cdot SA^2 + \frac{1}{4} BC^2 \cdot SK^2 \\ &= \frac{1}{4} SB^2 \cdot SA^2 + \frac{1}{4} SC^2 \cdot SA^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} BC^2 \cdot SK^2 \end{aligned}$$

$$= (dt \Delta SAB)^2 + (dt \Delta SAC)^2 + (dt \Delta SBC)^2.$$



Hình 176

Bây giờ ta trở lại bất đẳng thức cần chứng minh. Muốn vậy ta chỉ cần nhớ lại bất đẳng thức sau :

$$(X + Y + Z)^2 \leq 3(X^2 + Y^2 + Z^2).$$

Dựa vào bài tập trên các bạn tự giải một số bài tập sau bằng nhiều cách tương tự.

Bài 2. Hình chóp $SABC$ có $SB \perp SC$, hình chiếu của S trên mp (ABC) trùng với trực tâm H của ΔABC .

1) Chứng minh rằng $SA \perp (SBC)$.

2) Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, AC và AB . Chứng minh rằng tứ diện $SA_1B_1C_1$ có 4 mặt là các tam giác có 3 góc nhọn.

3) Hãy suy ra từ 2) rằng các góc nhị diện của tứ diện $SA_1B_1C_1$ kề với mặt $A_1B_1C_1$ hoặc cả 3 đều nhọn hoặc có đúng một nhị diện tù, 2 nhị diện còn lại nhọn.

4) Gọi α, β, γ là độ lớn của các góc nhị diện kề với mặt $A_1B_1C_1$ của tứ diện $SA_1B_1C_1$. Chứng minh rằng :

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1.$$

Bài 3. Hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, mặt bên SAB vuông góc với đáy, ΔSAB vuông tại S . Chứng minh rằng ΔSCD có 3 góc nhọn.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$. M là một điểm cố định trên mặt SC . Mặt phẳng qua AM cắt SB tại E , SD tại F . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{SE} + \frac{1}{SF}$$

có giá trị không phụ thuộc vị trí của thiết diện $AEMF$.

Giải : Cách 1. Xét hai hình chóp $SABC$ và $SADC$. Ta có

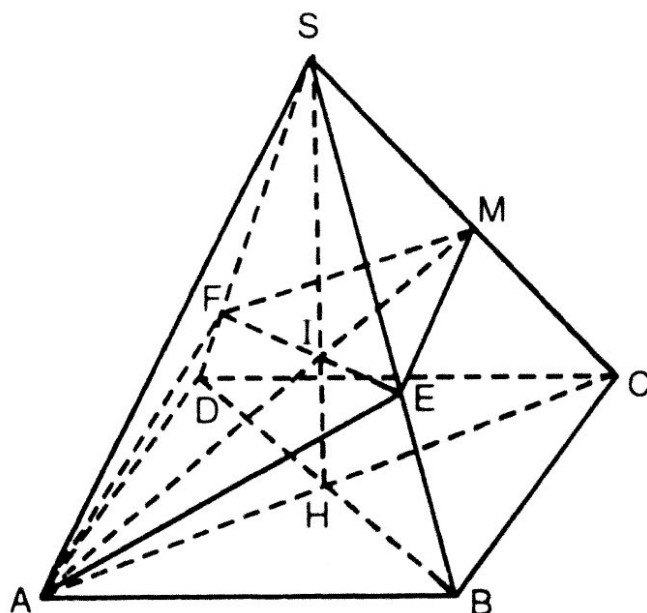
$$\frac{V_{(SAEM)}}{V_{(SABC)}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SA}{SA},$$

$$\frac{V_{(SAFM)}}{S_{(SACD)}} = \frac{SF}{SD} + \frac{SM}{SC} + \frac{SA}{SA}$$

Ở đây $V_{(SABC)} = V_{(SACD)} = \frac{V}{2}$ với V là thể tích SABCD.

Cộng 2 hệ thức trên, ta có :

$$\frac{V_{\text{SAEMF}}}{\frac{1}{2} V} = \frac{\text{SM}}{\text{SC}} \left(\frac{\text{SE}}{\text{SB}} + \frac{\text{SF}}{\text{SD}} \right). \quad (1)$$



Hình 177

Xét các hình chóp SABD và SBCE ta cũng có tương tự :

$$\frac{V_{\text{SAEF}}}{V_{\text{SADB}}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SA}{SA},$$

$$\frac{S_{SEMF}}{S_{SBCD}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} \cdot$$

Cộng hai hệ thức trên ta được :

$$\frac{V_{\text{SAEMF}}}{\frac{1}{2} V} = \frac{\text{SE}}{\text{SB}} \cdot \frac{\text{SF}}{\text{SD}} \left(1 + \frac{\text{SM}}{\text{SD}} \right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\left(\frac{SE}{SB} + \frac{SF}{SD} \right) \frac{SM}{SC} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SD} \left(1 + \frac{SM}{SC} \right)$$

hay $(SE + SF)SM = SE \cdot SF \left(1 + \frac{SM}{SC} \right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = \frac{1}{SM} + \frac{1}{SC} ; \left(\frac{1}{SM} + \frac{1}{SC} \text{ không đổi} \right).$$

Đó là điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi I là giao điểm của AM với SH, ta có :

$$dt\Delta SEF = dt\Delta SEI + dt\Delta SFI.$$

Vì vậy :

$$\frac{1}{2} SE \cdot SF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} SE \cdot SI \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} SF \cdot SI \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

($\alpha = \widehat{BSD}$),

hay $2SE \cdot SF \cos \frac{\alpha}{2} = SI(SE + SF) \Rightarrow$

$$\frac{1}{SE} + \frac{1}{SF} = \frac{2\cos \frac{\alpha}{2}}{SI}.$$

Dựa vào các cách giải bài 4 bạn đọc có thể tự giải thêm một số bài tập sau :

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SC, SB, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Đặt SM = m, SN = n, SP = p, SQ = q. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Bài 6. Cho hình chóp lục giác đều SABCDEF. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SD, SB, SE, SC, SF lần lượt tại M, N, P, Q, I, K.

Đặt $m = SM$, $n = SN$, $p = SP$, $q = SQ$, $i = SI$, $k = SK$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{i} + \frac{1}{k}.$$

Bài 7. Hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Một mặt phẳng cắt các cạnh SA, SC, SB, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SN} = \frac{SB}{SP} + \frac{SD}{SQ}.$$

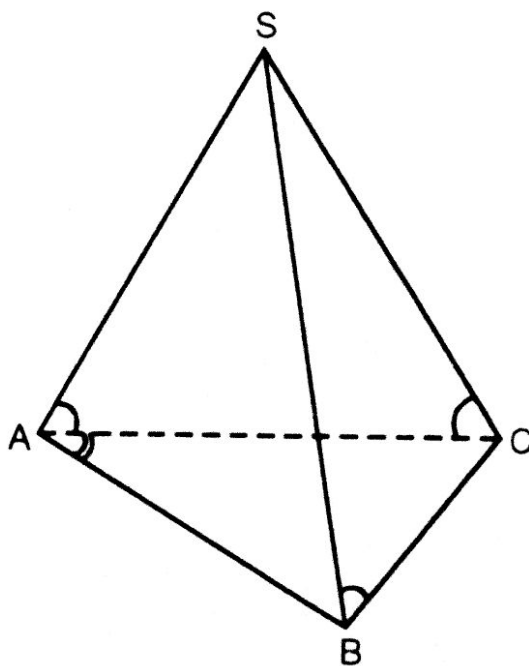
Bài 8. Hình chóp SABC có đáy là tam giác đều ABC, $\widehat{SAB} = \widehat{SBC} = \widehat{SCA}$. Chứng minh rằng SABC là hình chóp đều.

Giải : Cách 1.

Đặt $\alpha = \widehat{SAB}$ và giả sử

$$SA \leq SB \leq SC.$$

$\triangle SAC$ và $\triangle SBC$ có $BC = AC$, SC chung. Do $SA \leq SB$, nên $\widehat{SCB} \geq \widehat{SCA} = \alpha$. Mặt khác trong $\triangle SBC$ có $SB \leq SC$, nên $\widehat{SCB} \leq \alpha$. Suy ra $\alpha = \widehat{SCB} = \widehat{SCA}$, từ đó $\triangle SAC = \triangle SBC$ (c.g.c), suy ra $SA = SB$. Tương tự $SB = SC$.



Hình 178

Cách 2. Đặt $SA = x$, $SB = y$, $SC = z$ và giả sử $x \leq y \leq z$,

$AB = 1$, $\alpha = \widehat{SAB}$. Do $x \leq y$, nên $\alpha < 90^\circ$. Áp dụng định lý hàm cosin cho các $\triangle SAB$, $\triangle SBC$, $\triangle SAC$, ta có :

$$\begin{cases} y^2 = x^2 + 1 - 2kx & (1) \\ z^2 = y^2 + 1 - 2ky & (2) \\ x^2 = z^2 + 1 - 2kz & (3) \end{cases} \quad k = \cos \alpha > 0.$$

Lấy (1) trừ (3) ta được

$$y^2 - x^2 = (z - x)(2k - z - x).$$

Do $\begin{cases} y^2 - x^2 \geq 0 \\ z - x \geq 0, \end{cases}$ nên $2k \geq z + x.$

Lấy (2) trừ (1) ta được :

$$z^2 - y^2 = (y - x)(y + x - 2k)$$

và suy ra $y + x \geq 2k.$ (5)

Từ (4) và (5) ta suy ra $y + z \geq z + x$ hay $y \geq z.$

Mặt khác $y \leq z$, vậy $z = y.$

Từ (2) và (3) ta được $x^2 = z^2 \Rightarrow x = z.$

Cách 3. Giả sử $SA \leq SB \leq SC$. Trên SA vẽ cùng phía với S đặt $AS_1 = SB$; $AS_2 = SC$.

$$\Delta ABS_1 = \Delta SBC \text{ (c.g.c) nên } S_1B = SC,$$

$$\Delta ABS_2 = \Delta SAC \text{ (c.g.c) nên } S_2B = SA,$$

Trong ΔBSS_2 có S_1 thuộc đoạn SS_2 , do đó

$$BS_1 \leq \max (BS, BS_2)$$

hay $SC \leq \max (BS, SA).$

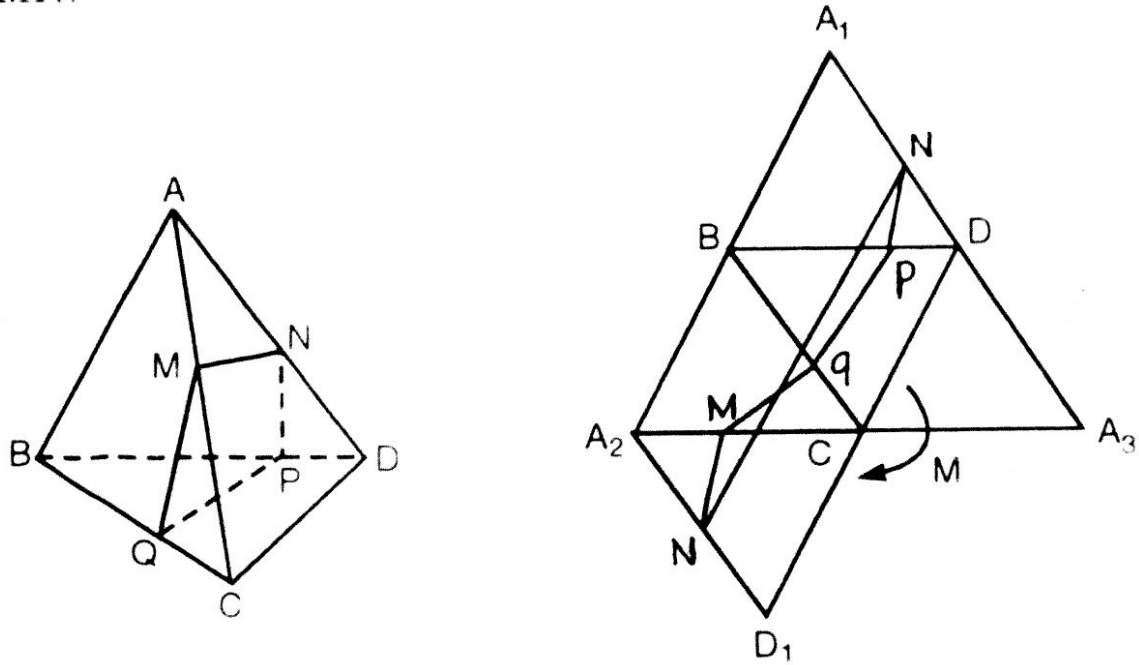
Nếu $\max (SB, SA) = SA$, thì $SC \leq SA$ và do vậy $SC = SA = SB$.

Nếu $\max (SB, SA) = SB$, thì $SC \leq SB$. Do đó $SB = SC$,
 $\widehat{SBC} = \widehat{SCB}$. $\Delta SBC = \Delta SAC$ (c.g.c) $\Rightarrow SB = SA$.

Bài 9. Hình chóp SABC có $SA = SB = SC$, $\widehat{SAB} = \widehat{SBC} = \widehat{SCA}$. Hình chóp đó có đều không ?

Bài 10. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Một mặt phẳng cắt bốn cạnh tứ diện tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng chu vi p của thiết diện MNPQ không nhỏ hơn 2a.

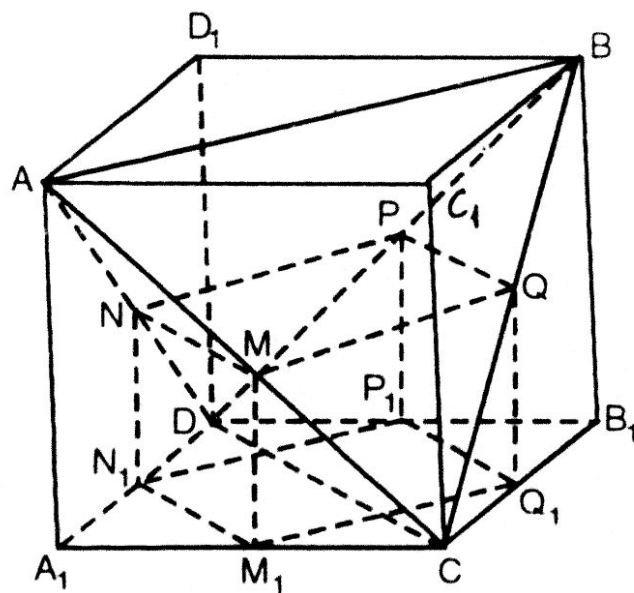
Giải : Cách 1. Khai triển ABCD trên mặt (BCD), ta nhận được $\Delta A_1A_2A_3$ đều (xem hình 179), trong đó A_1, A_2, A_3 là vị trí của A trong phép khai triển. Các đỉnh B, C, D là trung điểm của các cạnh $\Delta A_1A_2A_3$, chu vi p bằng độ dài đường gấp khúc NPQMN.



Hình 179

Ta quay ΔA_3CD quanh đỉnh C một góc 180° sao cho A_3 trùng với A_2 (xem hình 179).

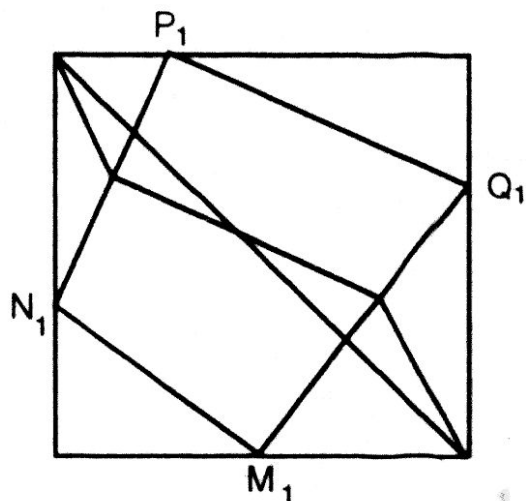
Khi đó D trùng với D_1 . Sau khi quay ta được tứ giác $A_1DD_1A_2$ là hình bình hành. Đoạn MN ghép liền với đường gấp khúc NPQM thành đường gấp khúc NPQMN có độ dài p. Mặt khác A_1NNA_2 là hình bình hành. $A_1A_2 = 2a$, nên $p \geq 2a$.



Hình 180

Cách 2. Dựng hình lập phương $AC_1BD_1A_1CB_1D$.

Giả sử mặt phẳng cắt AC tại M , AD tại N , BC tại Q , BD tại P (xem hình 180). Gọi M_1 , N_1 , P_1 , Q_1 là hình chiếu của M , N , P , Q trên (A_1CB_1D) . Khi đó M_1 , N_1 , Q_1 , P_1 thuộc CA_1 , A_1D , CB_1 và B_1D . Ta thấy rằng $p \geq M_1N_1 + N_1P_1 + P_1Q_1 + Q_1M_1$.



Hình 181

Trong hình vuông A_1CB_1D thì $M_1N_1 + N_1P_1 + P_1Q_1 + Q_1M_1 \geq 2A_1B_1 = 2a$ (bạn đọc tự chứng minh).

Bạn đọc có thể chứng minh các bài toán sau đây bằng các cách tương tự.

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$. M , N , P , Q là 4 điểm lần lượt trên AC , AD , BC , BD . Tìm vị trí của 4 điểm này để $MN + NP + PQ + QM$ nhỏ nhất.

Bài 12. Hình lập phương có cạnh bằng 1. Một mặt phẳng đi qua tâm của lập phương, cắt lập phương theo một thiết diện có diện tích S . Chứng minh rằng $S \geq 1$.

Bài 13. Cho một chóp cụt tứ giác đều $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ($AB > A_1 B_1$) có bán kính vòng tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$ bé hơn bán kính vòng tròn ngoại tiếp mặt bên. Hãy tìm một đường gấp khúc nối 2 đỉnh A và C_1 , các cạnh của nó nằm trên mặt của chóp cụt, có độ dài ngắn nhất (dùng phương pháp khai triển).

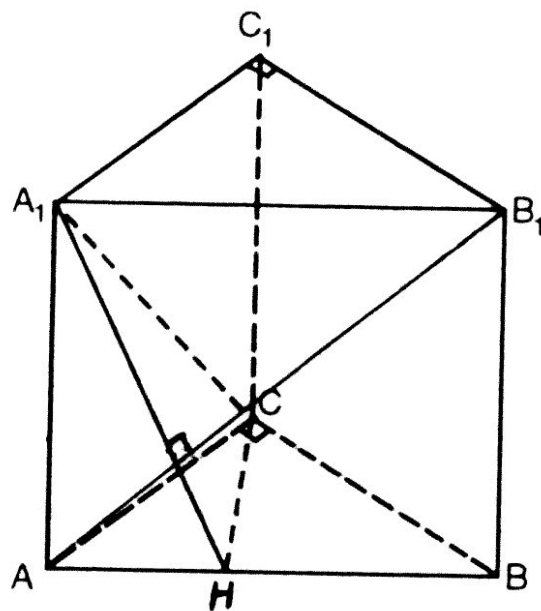
Bài 14. Đáy của một lăng trụ đứng $ABCA_1B_1C_1$ là tam giác vuông cân có $AC = BC = a$. Ngoài ra $A_1C \perp B_1A$.

Tính cạnh bên của lăng trụ.

Giải :

Cách 1. Vì $B_1C_1 \perp C_1A_1$,
 $B_1C_1 \perp CC_1$, suy ra
 $B_1C_1 \perp mp (ACC_1A_1)$.

C_1A là hình chiếu của B_1A trên $mp (ACC_1A_1)$, theo định lý 3 đường vuông góc, ta có $CA_1 \perp C_1A$. Vì vậy ACC_1A_1 là hình vuông $CA = CC_1 = a$.



Hình 182

Cách 2. Gọi H là trung điểm của AB. Ta thấy rằng $CH \perp mp (ABB_1A_1)$ nên $CH \perp AB_1$.

Mặt khác $A_1C \perp B_1A$, nên $B_1A \perp mp (A_1CH)$ hay $B_1A \perp A_1H$.

Kẻ từ B_1 đường $B_1K \parallel A_1H$, cắt AB tại K. Ta có $\Delta BB_1K = \Delta AA_1H$,
 nên $AH = BK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong ΔA_1B_1K :

$$BB_1^2 = KB \cdot AB, \text{ suy ra } BB_1 = a.$$

Bạn hãy giải bài toán tương tự bằng một trong các cách đã chỉ ra ở bài 14.

Bài 15. Lăng trụ tam giác đều $ABCA_1B_1C_1$ có cạnh đáy $AB = a$, $AB_1 \perp BC_1$. Tính cạnh bên.

$$(\text{Đáp số } AA' = \frac{a}{\sqrt{2}}).$$

Bài 16. Tứ diện ABCD có $dt\Delta ABC = dt\Delta ABD$. Chứng minh rằng đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD.

Giải : Cách 1. (Hình 183).
Kẻ CP, DQ, IJ vuông góc với AB (I là điểm giữa CD). Gọi $[\alpha]$; $[\beta]$; $[\gamma]$ là 3 mặt phẳng vuông góc với AB tại P, J, Q.

Khi đó $[\alpha]$ chứa C, $[\beta]$ chứa J, $[\gamma]$ chứa D.

Nếu $P \equiv Q$, thì $[\alpha] \equiv [\beta] \equiv [\gamma]$ và như vậy $IJ \perp CD$.

Nếu $[\alpha] \neq [\gamma]$, áp dụng định lý Talét ta có :

$$\frac{JP}{JQ} = \frac{IC}{ID},$$

suy ra $JP = JQ$.

$\Delta CJP = \Delta QDJ$ (c.c),
nên $JC = JD$.

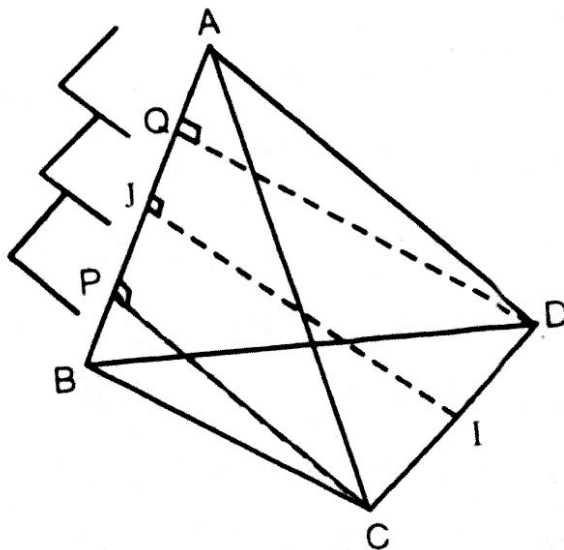
Vậy $IJ \perp CD$.

Cách 2. (Hình 184). Kẻ $CP \perp AB$,
 $DQ \perp AB$.

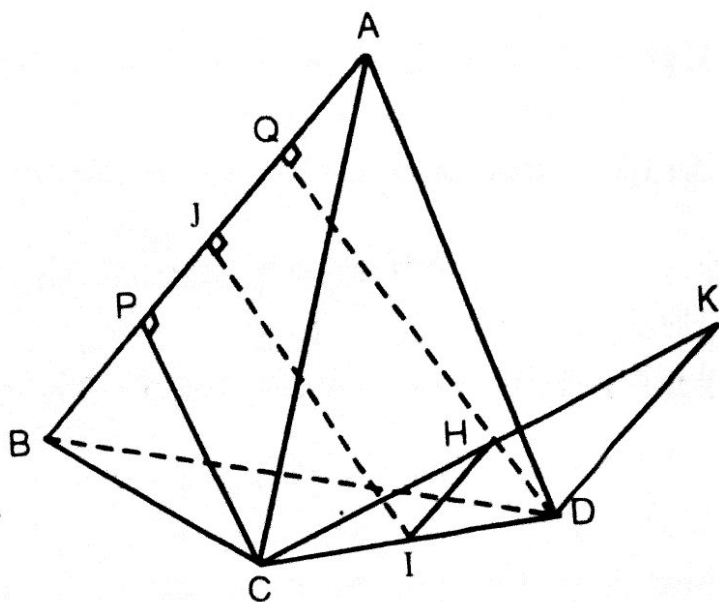
Gọi I, J là trung điểm của CD và PQ.

Do $CP = DQ$, nên
 $\Delta CPJ = \Delta DQJ$, suy ra $JC = JD$ và $IJ \perp CD$.

Trong mặt phẳng (ABD), kẻ $DK \parallel PQ$. Khi đó $QK = PD$.



Hình 183



Hình 184

Mặt khác

$$\Delta CPQ = \Delta DQP$$

nên

$$DP = CQ \text{ và } QK = QC.$$

Gọi H là trung điểm của CK, lúc đó $QK \perp CK$. Mặt khác $IH \parallel DK$, nên $IH \parallel PQ$ và $IH = \frac{PQ}{2} = JQ$. Tứ giác IJQH là hình bình hành, nên $IJ \parallel QH$ và $IJ \perp CK$. Ta lại có $IJ \perp CD$, nên $IJ \perp (CDK)$.

Bài 17. Tứ diện ABCD có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \frac{\pi}{2}$. Gọi I là điểm giữa cạnh AD. B', C' là hình chiếu của B, C trên AD. Chứng minh rằng : $IB' = IC'$.

Giải : Cách 1. Dựa vào cách 1 của bài 16.

Cách 2. (Dùng hệ thức lượng trong tam giác thường). (Hình 185).

Giả sử $AB \geq BD$, ta có $AB^2 + AC^2 = BD^2 + CD^2$, hay

$$AB^2 - BD^2 = CD^2 - AC^2.$$

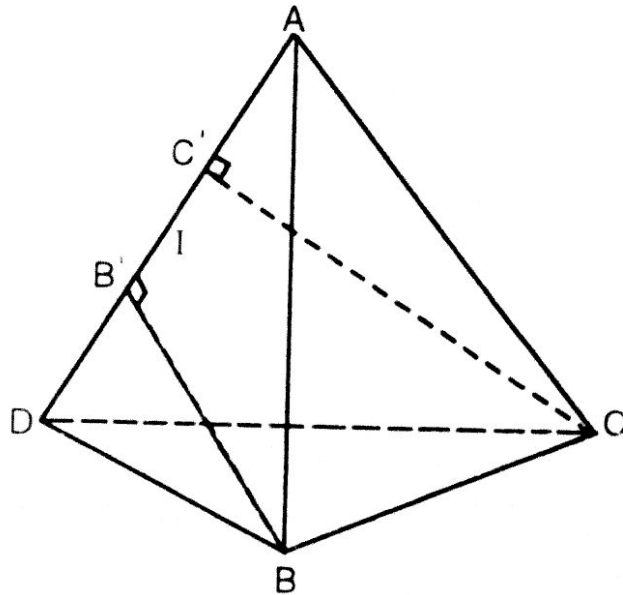
$$\begin{aligned} \Delta ABD \text{ có : } AB^2 - BD^2 &= \\ &= 2AD \cdot IB', \end{aligned} \quad (1)$$

Hình 185

$$\Delta ADC \text{ có : } CD^2 - AC^2 = 2AD \cdot IC'. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $IB' = IC'$.

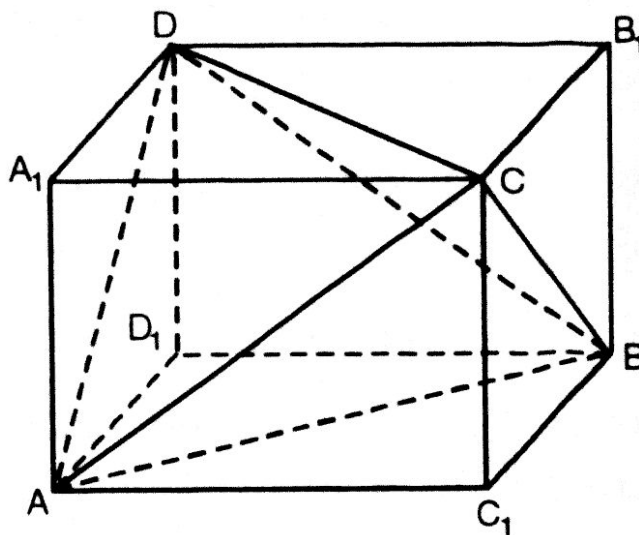
Bài 18. Tứ diện ABCD có $AB = CD = a$; $AC = BD = b$; $AD = BC = c$.



- 1) Tìm tâm và tính bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện.
- 2) Chứng minh rằng 4 mặt tứ diện là các tam giác có 3 góc nhọn.

Giải : 1) Cách 1.

Dựng hình hộp $AC_1BD_1A_1CB_1D$ mà các cạnh tứ diện là đường chéo của hình hộp (xem hình 186), ta chứng minh được rằng $AC_1BD_1A_1CB_1D$ là hình hộp chữ nhật. Tâm O của cầu ngoại tiếp $AC_1BD_1A_1CB_1D$ là giao điểm các đường chéo hình hộp và do tính duy nhất của hình cầu qua bốn điểm không đồng phẳng, nên O cũng là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.



Hình 186

Đường kính của O là đường chéo của hình hộp. Gọi x, y, z là 3 cạnh hình hộp, thì

$$4R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad R - \text{bán kính của } O.$$

Ta lại có

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 \\ z^2 = c^2 + a^2 \\ y^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \quad \text{Suy ra } R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

Cách 2. Tìm trực tiếp.

Gọi I, J là trung điểm của AB, CD . Gọi O là trung điểm IJ . Ta chứng minh được rằng O là tâm cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Tính R : ta có $R^2 = OB^2 = OI^2 + IB^2$;

$$OI^2 = \frac{1}{4} IJ^2 ; IJ^2 = AJ^2 - AI^2.$$

$$\text{Xét } \triangle ACD : AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{CD^2}{2} ,$$

$$\text{suy ra } AJ^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} ,$$

$$IJ^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} , \text{ vì vậy } R^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} .$$

2) Do tứ diện có 4 mặt là các tam giác bằng nhau, ta chỉ cần chứng minh một tam giác có 3 góc nhọn.

Cách 1. Dựa vào cách 1 của 1) và xét hình chóp C_1ABC có 3 góc phẳng tại C_1 vuông và dựa vào 2) của bài 1.

Cách 2. Ta thấy tổng các góc phẳng ở mỗi đỉnh bằng 180° . Xét các góc phẳng tại A ta có :

$$\widehat{BAC} < \widehat{CAD} + \widehat{DAB} \Rightarrow 2 \widehat{BAC} < 180^\circ$$

$$\text{hay } \widehat{BAC} < 90^\circ.$$

Cách 3. Theo cách tìm tâm O đã trình bày ở cách 2 câu 1). Ta cũng chứng minh được rằng O là tâm cầu nội tiếp trong tứ diện $ABCD$, và do đó tiếp điểm của O với 4 mặt tứ diện nằm trong các mặt này. Mặt khác hình chiếu của O lên mỗi mặt trùng với tiếp điểm đã nói trên và là tâm vòng tròn ngoại tiếp của các mặt này. Vì vậy các mặt của tứ diện là các tam giác có 3 góc nhọn.

Bài 19. Tứ diện $OABC$ có 3 góc phẳng tại O vuông $OA \perp OB \perp OC$. Chứng minh rằng tổng 3 góc phẳng tại đỉnh A bằng 90° .

Giải : Cách 1. Dựng lập phương $OAEFIKMN$ (xem hình 187) cạnh OA . Khi đó các đỉnh B, C thuộc OF và ON .

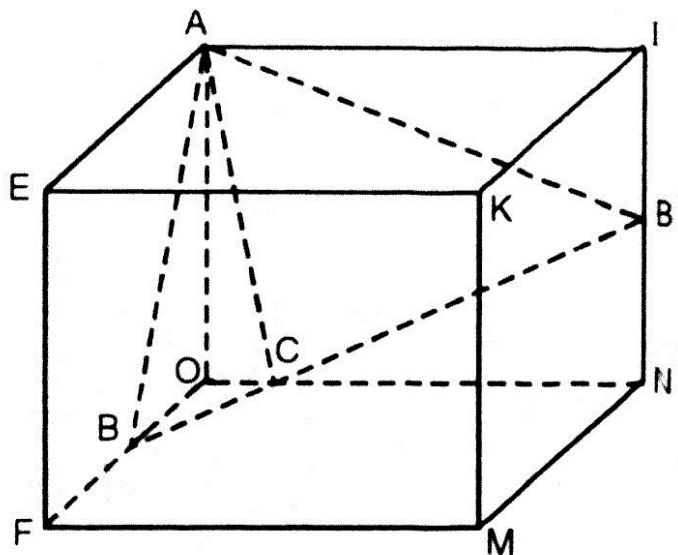
Trên IN lấy điểm B' sao cho NB' = OC.

$\triangle OBC = \triangle NB'C$ nên $B'C = BC$.

$\triangle IAB' = \triangle OAB$ nên $AB' = AB$ và

$$\widehat{OAB} = \widehat{IAB'}.$$

$\triangle ABC + \triangle AB'C$ (c.c.c) nên $\widehat{BAC} = \widehat{B'AC}$.



Từ trên suy ra :

Hình 187

$$\widehat{OAB} + \widehat{OAC} + \widehat{BAC} = \widehat{IAB'} + \widehat{B'AC} + \widehat{OAC} = \frac{\pi}{2}.$$

Cách 2. Đặt $\alpha = \widehat{BAC}$; $\beta = \widehat{OAB}$; $\gamma = \widehat{OAC}$. Áp dụng định lý hàm cosin cho $\triangle ABC$, ta có :

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2OA^2}{2AB \cdot AC} = \cos \beta \cdot \cos \gamma,$$

Từ $OA = OB + OC$, ta có : $\frac{OB}{OA} + \frac{OC}{OA} = 1 = \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma$.

Vậy $\sin(\beta + \gamma) = \cos \beta \cdot \cos \gamma$ hay $\cos \alpha = \sin(\beta + \gamma)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - (\beta + \gamma) \text{ hoặc } \alpha = (\beta + \gamma) - \frac{\pi}{2}.$$

Trong $\triangle OAB$ có $OA > OB$ nên $\beta < \widehat{OBA}$ hay $\beta < \frac{\pi}{4}$. Tương tự $\gamma < \frac{\pi}{4}$. Vậy $\beta + \gamma < \frac{\pi}{2}$, nên $\alpha = (\beta + \gamma) - \frac{\pi}{2}$: loại.

Bài 20. Hình chóp SABCD có cạnh $SA = x$. Các cạnh còn lại bằng 1.

1) Chứng minh ΔSAC vuông.

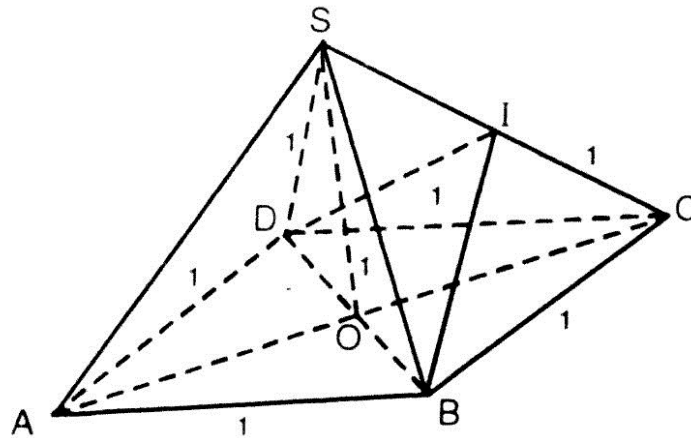
2) Tính thể tích hình chóp.

Giải : Cách 1. Gọi O là tâm của $ABCD$.

Vì $\Delta ABCD = \Delta SBD = \Delta ABD$ (c.c.c), do đó $OC = OA = OS$.

ΔSAC có trung tuyến $SO = \frac{1}{2} AC$, nên vuông tại S .

Cách 2. Gọi I là điểm giữa SC . Ta có $BI \perp SC$, $DI \perp SC$ suy ra $BC \perp mp$ (BID) và $SC \perp OI$. Do $OI \parallel SA$, nên $SA \perp SC$.



Hình 188

2) *Cách 1.*

$$V_{SABCD} = 2V_{BSAC} \text{ trong đó } dt \Delta SAC = \frac{x}{2};$$

$$AC = \sqrt{1 + x^2};$$

$$OB = \sqrt{1 - \frac{1 + x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2};$$

$$V_{BSAC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3 - x^2} = \frac{x\sqrt{3 - x^2}}{12}.$$

Cách 2. Kẻ $SH \perp AC$. Ta chứng minh được SH là đường cao hình chóp $SABCD$.

$$V = \frac{1}{3} SH \cdot \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{1}{6} SH \cdot AC \cdot BD,$$

trong đó
$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1}{x^2}.$$

Vậy
$$SH = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; AC = \sqrt{1+x^2};$$

$$BD = 2OB = \sqrt{3-x^2}.$$

Cách 3.

$$V_{SABCD} = 2V_{SBCD} = 4V_{SIBD};$$

$$V_{SIBD} = \frac{1}{3} dt(\Delta IBD) \cdot SI;$$

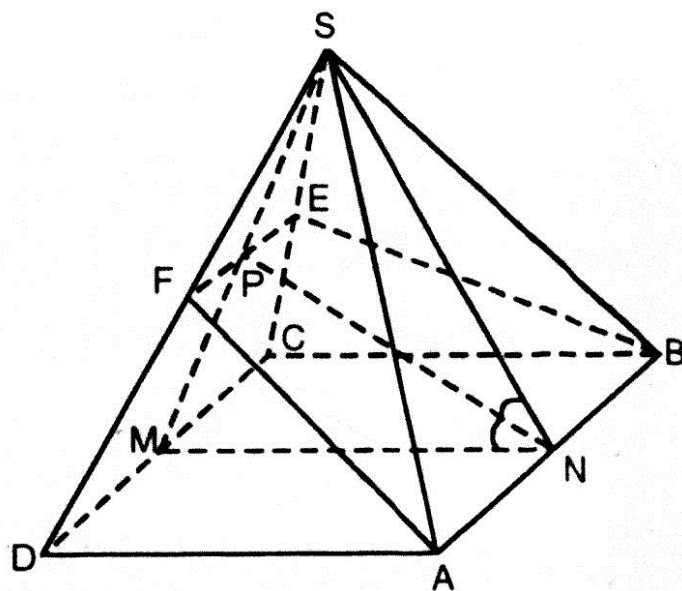
$$dt(\Delta IBD) = \frac{1}{2} BD \cdot OI = OB \cdot OI,$$

trong đó :
$$OB = \frac{1}{2} \sqrt{3-x^2}, OI = \frac{1}{2} x, SI = \frac{1}{2}.$$

Bài 21. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có góc nhị diện ở đáy α , cạnh đáy $AB = a$. Mặt phẳng phân giác của nhị diện (AB) cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện.

Giải : Cách 1. Gọi E, F là giao điểm của mặt phẳng phân giác với SC và SD, M, N là trung điểm của CD, AB. P là giao điểm của SM với EF.

Tứ giác ABEF là một hình thang cân, còn PN là đường cao của hình thang này.



Hình 189

$$dt\,ABMN = \frac{1}{2} (AB + EF) \cdot PN.$$

Ta có : $\widehat{SMN} = \alpha$; $\widehat{PNM} = \frac{\alpha}{2}$

Ta cần tính EF và PN.

Trong ΔSCD :

$$\frac{EF}{CD} = \frac{SP}{SM} ,$$

trong ΔSPN : $\frac{SP}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{SN}{\sin \frac{3\alpha}{2}} = \frac{SM}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$

Từ đó : $\frac{SP}{SM} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$ và $EF = \frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$

Trong ΔPMN :

$$\frac{PN}{\sin \alpha} = \frac{MN}{\sin \widehat{MPN}} = \frac{MN}{\sin \frac{3\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin \frac{3\alpha}{2}} ,$$

$$PN = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2}} .$$

Cách 2. Dùng công thức

$$V_{SABEF} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot dt ABEF,$$

h là đường cao hạ từ S tới mặt phẳng ABEF. Ta cần tính h và V_{SABEF} , từ đó suy ra dt ABEF.

Kẻ $SH \perp PN$. Ta thấy $SH \perp ABEF$ và do đó $SH = h$.

Trong $\triangle SNH$: $h = SN \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{atg} \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \alpha}$.

Còn $V_{SABEF} = V_{SABE} + V_{SAEF}$.

Ta có :

$$\frac{V_{SABE}}{V_{SABC}} = \frac{SE}{SC},$$

$$\frac{V_{SAEF}}{V_{SACD}} = \left(\frac{SE}{SC} \right)^2$$

hay $V_{SABE} + V_{SAEF} = \frac{V_{SABCD}}{2} \left\{ \frac{SE}{SC} + \left(\frac{SE}{SC} \right)^2 \right\}$.

Mặt khác :

$$\frac{SE}{SC} = \frac{SP}{SM} = \frac{SN}{MN}.$$

Vậy $V_{SABEF} = \frac{V_{SABCD}}{2} \cdot \left\{ \frac{SN}{MN} + \left(\frac{SN}{MN} \right)^2 \right\}$

$$\Rightarrow dtABEF = \frac{3V_{SABEF}}{h} = \frac{3}{2} V_{SABCD} \frac{\frac{SN}{MN} + \left(\frac{SN}{MN} \right)^2}{h},$$

trong đó :

$$3V_{SABCD} = \frac{a^3}{2} \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{SN}{MN} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha}.$$

Các bạn tự giải các bài toán sau đây bằng cả hai cách như bài 21.

Bài 22. Cho hình chóp SABCD đáy là hình vuông ABCD cạnh $AB = a$. Cạnh bên $SA \perp$ ABCD và $SA = h$. Mặt phẳng qua AB

cắt SC tại E, SD tại F. Biết $\frac{SE}{SC} = k$. Tính diện tích thiết diện ABEF.

Bài 23. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD cạnh đáy $AB = a$, góc giữa cạnh bên với đáy là α . Một mặt phẳng qua A, song song với BD và hợp với đáy hình chóp góc β , cắt hình chóp theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện.

Bài 24. Cho tứ diện ABCD có mặt ABC là tam giác vuông tại C, cạnh $AC = b$, $BC = a$. Cạnh $DA \perp ABC$ và $DA = \frac{b^2}{2a}$.

Chứng minh rằng mặt cầu đường kính AC tiếp xúc với BD.

Giải : Cách 1. Gọi O là trung điểm của AC, H là chân đường vuông góc hạ từ O đến BD. Ta cần chứng minh rằng $OH = \frac{1}{2} AC$. Hạ

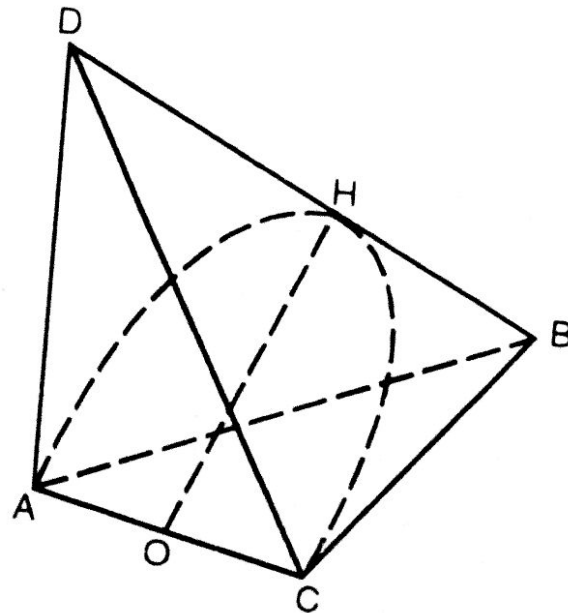
$OK \perp AB$, khi đó $OK \perp ABD$

và $HK \perp BD$. $\triangle ABD \sim \triangle KBH$ nên

$$\frac{BH}{BK} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BH = \frac{AB \cdot BK}{BD} = \frac{AB(AB - AK)}{BD}$$

(K nằm trên cạnh AB),

hay
$$BH = \frac{AB^2 - AB \cdot AK}{BD}$$



Hình 190

Mặt khác tứ giác OKBC nội tiếp trong vòng tròn, nên

$$AK \cdot AB = OA \cdot CA = \frac{b^2}{2},$$

và

$$BH = \frac{a^2 + b^2 - \frac{b^2}{2}}{\sqrt{AD^2 + a^2 + b^2}} = \frac{\frac{2a^2 + b^2}{2}}{\frac{2a^2 + b^2}{2a}} = a$$

ta được

$$BH = BC \text{ và } \triangle OBH = \triangle OCH,$$

từ đó

$$OH = OC = \frac{1}{2} AC.$$

Cách 2. Vì A, C nhìn BD dưới góc vuông, nên A, C thuộc mặt cầu đường kính BD và AC là dây cung của mặt cầu. O thuộc AC, nên $\widehat{BOD} > 90^\circ$, và H nằm trên đoạn BD. Ta có :

$$\begin{aligned} DH^2 - BH^2 &= \left(AD^2 + \frac{b^2}{2} \right) - \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) = AD^2 - a^2 = \\ &= \frac{b^4}{4a^2} - a^2 = \frac{(b^2 + 2a^2)(b^2 - 2a^2)}{4a^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (DH - BH)(DH + BH) = BD \cdot \frac{b^2 - 2a^2}{2a}$$

$$\Rightarrow DH - BH = \frac{b^2 - 2a^2}{2a};$$

ta lại có :

$$DH + BH = \frac{b^2 + 2a^2}{2a}, \text{ suy ra } DH = AD = \frac{b^2}{2a}.$$

Có thể áp dụng 2 cách giải trên cho các bài tập sau :

Bài 25. Tứ diện ABCD có $AC = AD = BC = BD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Biết rằng α, β là các độ lớn nhị diện cạnh AB và CD. Tìm liên hệ giữa α, β để hình cầu đường kính IJ tiếp xúc với 6 cạnh tứ diện.

Bài 26. Hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau, vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung. C, D là hai điểm trên By và Ax, thay đổi sao cho $AD + BC = CD$. Chứng minh rằng CD luôn tiếp xúc với mặt cầu đường kính AB. Tìm quỹ tích tiếp điểm.

Bài 27. Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng $d \perp (ABC)$ tại A ta chọn hai điểm M, N ở về hai phía khác nhau đối với cầu ngoại tiếp tứ diện BCMN, (I) là thiết diện của O với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng khi M, N thay đổi trên d, thì (I) cố định.

Giải : Cách 1.

Gọi J là trung điểm của BC, ta thấy rằng $\widehat{MJN} = 1$ vuông. Xét $\triangle MJN$:

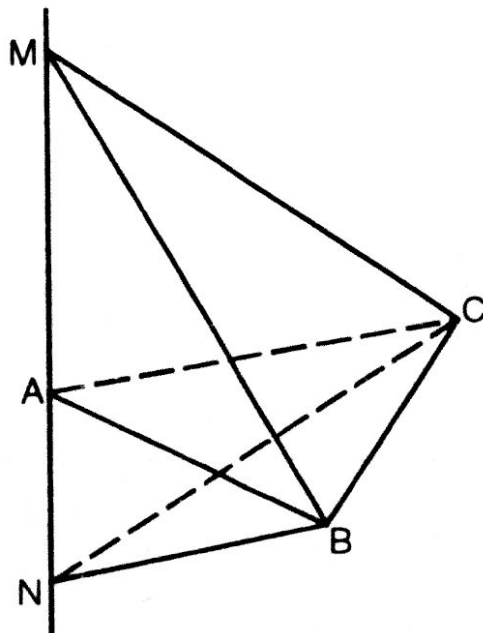
$$AM \cdot AN = AJ^2 = \frac{3a^2}{4}$$

(a là độ dài cạnh tam giác đều ABC).

Gọi C' là giao điểm của (I) với AC kéo dài. Áp dụng hệ thức lượng trong vòng tròn ngoại tiếp tứ giác MCNC' ta có :

$$AM \cdot AN = CA \cdot C'A,$$

từ đó suy ra $C'A = \frac{3a}{4}$ và C' cố định. (I) chứa 3 điểm cố định, nên (I) cố định.



Hình 191

Cách 2. MN là một dây cung của mặt cầu O, áp dụng phương tích của A đối với O ta có

$$AM \cdot AN = R^2 - l^2$$

(R là bán kính của O, l - khoảng cách từ A đến O).

Xét $\triangle OAB$: $OB^2 - OA^2 = \frac{3a^2}{4}$, nên O thuộc mặt phẳng $Q \perp AB$

và cách trung điểm của AB một đoạn $\frac{3}{4}a$.

Xét $\triangle OAC$: $OC^2 - OA^2 = \frac{3a^2}{4}$, nên O thuộc mặt phẳng $P \perp AC$,

cách trung điểm AC một đoạn $\frac{3}{4}a$.

Vậy tâm O thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng cố định P, Q. Giao tuyến này $\perp (ABC)$ và do đó đi qua tâm của vòng tròn I. Vậy (I) cố định.

Bạn hãy làm bài tập dưới đây bằng 2 cách tương tự.

Bài 28. Cho hình chữ nhật ABCD. d, d' là hai đường thẳng cùng vuông góc với (ABCD) lần lượt tại C và D. M, N là 2 điểm nằm trên d và d' khác phía đối với (ABCD) và sao cho

$$mp(MAB) \perp mp(NAB).$$

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABMN. (I) là giao tuyến của mặt cầu tâm O với (ABCD). Chứng minh rằng khi M, N thay đổi, thì (I) là hình tròn cố định.

Bài 29. Hình hộp chữ nhật ABCDA'B'C'D' có các cạnh $AA' = a$, $AB = b$, $AD = c$. Trên các phần kéo dài của AA', AB, AD về các phía A', B và D ta chọn các điểm E, F, G sao cho mp(EFG) chứa điểm C'. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{AE} + \frac{b}{AF} + \frac{c}{AG} = 1.$$

Giải : Cách 1.

Dùng cách tính tỷ số thể tích ta có :

$$\frac{V_{C'A'EG}}{V_{AEFG}} = \frac{CC'}{AE} = \frac{a}{AE} ,$$

$$\frac{V_{C'AEF}}{V_{AEFG}} = \frac{B'C'}{AG} = \frac{c}{AG} ,$$

$$\frac{V_{C'AEG}}{V_{AEFG}} = \frac{C'D'}{AF} = \frac{b}{AF} ;$$

Cộng 3 hệ thức lại ta được điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi P, Q, R là giao điểm của EC', FC' và GC' với các cạnh $\triangle EFG$. Ta thấy rằng AC đi qua P, AD' qua Q và AB' qua R. Ta sẽ có :

$$\frac{a}{AE} = \frac{CC'}{AE} = \frac{PC'}{PE} ,$$

$$\frac{b}{AF} = \frac{C'D'}{AF} = \frac{QC'}{QF} ,$$

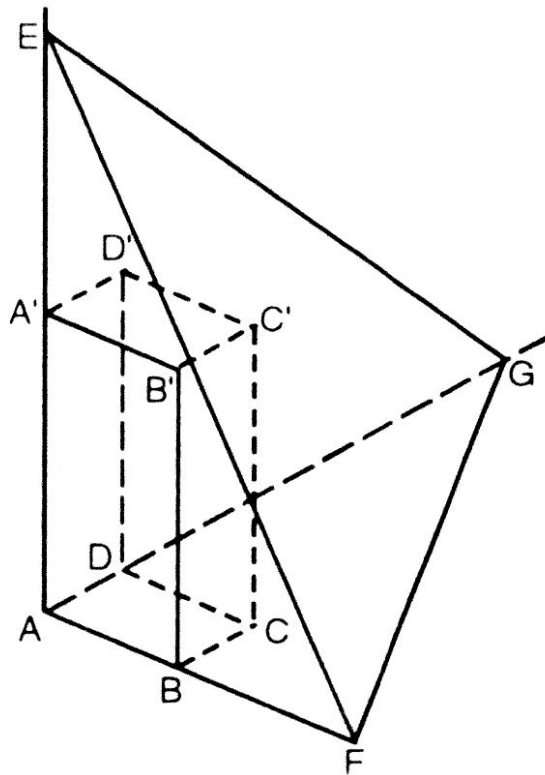
$$\frac{c}{AG} = \frac{B'C'}{AG} = \frac{RC'}{RG} ;$$

mặt khác ta dễ chứng minh rằng trong $\triangle EFG$

$$\frac{PC'}{PE} + \frac{QC'}{QF} + \frac{RC'}{RG} = 1.$$

Bạn có thể giải bài toán sau đây cũng bằng 2 cách như vậy.

Bài 30. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. P là một điểm bất kỳ ở đáy của hình chóp.



Hình 192

Chứng minh rằng tổng khoảng cách từ P đến bốn mặt bên của hình chóp có giá trị không phụ thuộc vị trí của điểm P.

Bài 31. Tứ diện ABCD có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh a. Các mặt còn lại là các tam giác vuông. Xác định tâm và bán kính hình cầu nội tiếp của tứ diện đó.

Giải : Gọi I, J là trung điểm của AD và BC. $\widehat{BIC}$ là góc phẳng của nhị diện AD, IJ là phân giác của góc này, nên (AJD) là mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh AD.

Tương tự (BIC) là mặt phẳng phân giác của nhị diện (BC). IJ là giao tuyến của 2 mặt phẳng phân giác, nên tâm cầu nội tiếp O phải thuộc IJ.

Cách 1. Nếu dựng thêm mặt phẳng phân giác của nhị diện (CD), thì O là giao của IJ với mặt phẳng này. Bán kính cầu O được tính theo công thức :

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} (2 - \sqrt{3}).$$

Cách 2. Lấy trên IJ một điểm O, kẻ $OM \perp CI$, nên $OM \perp (ACD)$. Kẻ $OK \perp JD$, thì $OK \perp (BCD)$. Ta có :

$\triangle OMI \sim \triangle CIJ$, nên

$$\frac{OM}{JC} = \frac{OI}{IC}, \text{ hay } OM = \frac{OI}{\sqrt{2}}.$$

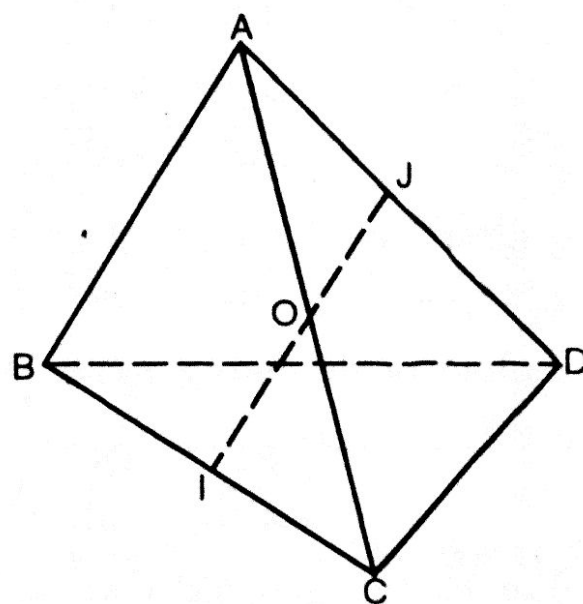
$\triangle OJK \sim \triangle DIJ$ nên

$$\frac{OK}{ID} = \frac{OJ}{JD} \text{ hay } OK = \frac{OJ\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Để O là tâm cầu, thì O phải cách đều bốn mặt.

Muốn vậy, ta cần có :

$$\begin{aligned} & OM = OK, \\ \text{hay} \quad & \frac{OI}{\sqrt{2}} = \frac{OJ\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \end{aligned}$$



Hình 193

$$\frac{OI}{OJ} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Vậy O là điểm chia trong đoạn IJ theo tỷ số $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Muốn tính được bán kính, dựa vào hệ

$$\begin{cases} OI + OJ = IJ \\ \frac{OI}{OJ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ với } IJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

sẽ tìm được OI và $R = OM = \frac{OI}{\sqrt{2}}$. Bằng một trong 2 cách trên bạn hãy giải bài toán tương tự sau :

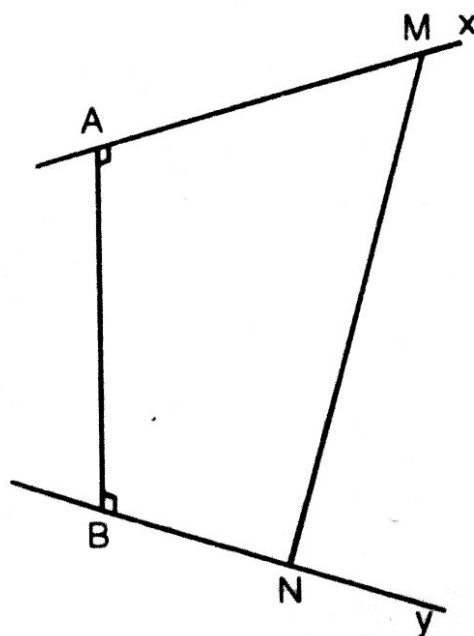
Bài 32. Tứ diện ABCD có $AC = AD = BC = BD$. Các góc nhị diện cạnh (AB) và (CD) tương ứng bằng α và β . I, J là trung điểm của các cạnh AB và CD. Biết $IJ = m$. Tìm tâm và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD.

Bài 33. Trên hai nửa đường thẳng Ax, By chéo nhau và vuông góc với nhau, nhận AB làm đường vuông góc chung, ta chọn lần lượt hai điểm M và N sao cho $AM + BN = AB$.

Xét một mặt cầu O tiếp xúc với Ax tại M, By tại N. Chứng minh rằng mặt cầu đó cũng tiếp xúc với AB.

Giải : Cách 1.

Dựng hình hộp chữ nhật AMCEBFDN. Lấy trên cạnh CD điểm O sao cho $OC = AM$, $OD = BN$.



Hình 194

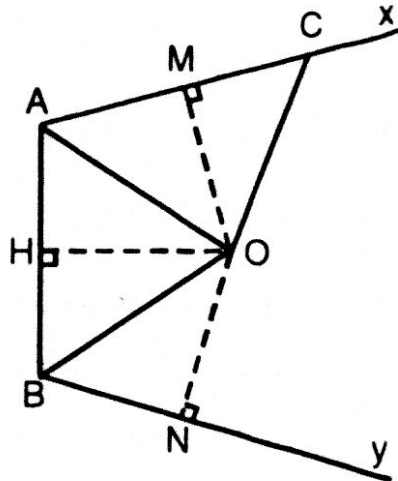
Ta thấy rằng $\triangle OCM = \triangle ODN$, suy ra $OM = ON$. Mặt khác $AM \perp (MCDF)$, $BN \perp (ABNE)$ nên $OM \perp Ax$; $ON \perp By$. Vậy O là tâm mặt cầu tiếp xúc với Ax , By tại M , N .

Kẻ $OH \perp AB$, tứ giác $OHBD$ là hình chữ nhật :

$$OH = BD = \sqrt{BN^2 + AM^2}.$$

Do $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2} = \sqrt{AM^2 + BN^2}$, suy ra $OH = OM$.
Mặt cầu O tiếp xúc với AB tại H .

Cách 2. Giả sử mặt cầu O tiếp xúc với Ax , By tại M và N . Khi đó $OM \perp Ax$, $ON \perp By$. Lấy trên Ax điểm C sao cho $AC = AB$. Ta có : $MC = BN$, $\triangle OCM = \triangle OBN$ (c.g.c), nên $OC = OB$; $\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.c.c), nên $OH = OM$, trong đó OH là đường cao của tam giác OAB .



Cách 3. Ta có

Hình 195

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = OM^2 + AM^2 - OH^2, \quad (1)$$

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = ON^2 + BN^2 - OH^2; \quad (2)$$

$OM = ON$, từ (1) và (2) ta suy ra :

$$AH^2 - BH^2 = AM^2 - BN^2,$$

$$\Rightarrow (AH + BH)(AH - BH) = (AM - BN)(AM + BN),$$

$$\text{hay} \quad AH - BH = AM - BN; \quad (3)$$

$$\text{mặt khác} \quad AH + BH = AM + BN, \quad (4)$$

$$\text{suy ra} \quad AH = AM,$$

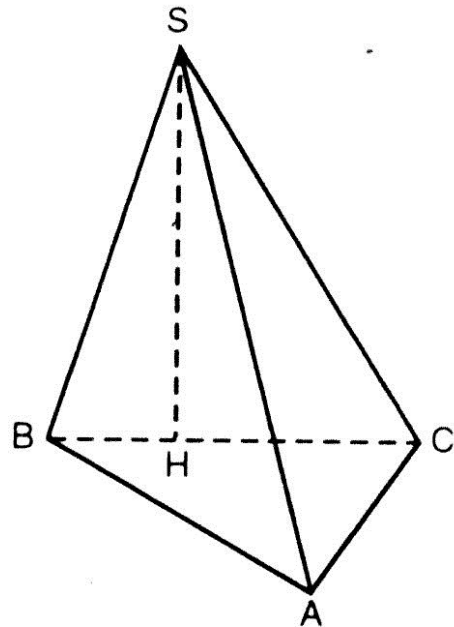
$$\triangle OAH = \triangle OAM \text{ và } OH = OM.$$

Bài 34. Hình chóp $SABC$ có : $SA = SB = SC$; $mp(SBC) \perp mp(ABC)$; $dt SAB = dt SBC = dt SAC = a^2$. Tính thể tích hình chóp.

Giải : Cách 1. Kẻ $SH \perp BC$, suy ra $SH \perp mp(ABC)$. Do $SA = SB = SC$, nên H là tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔABC . Vậy ΔABC vuông tại A và $BC > AB$; $BC > AC$. ΔSBC và ΔSAB có SB chung, $SA = SC$, $AB < BC$, suy ra

$$\widehat{BSC} > \widehat{BSA}.$$

Mặt khác $\sin \widehat{BSC} = \sin \widehat{BSA}$ (dt $\Delta SBC = dt \Delta SAB$) nên $\widehat{BSC} = \pi - \widehat{BSA}$.



Hình 196

Kéo dài SC về phía S một đoạn $SK = SC$, khi đó $KB \perp mp(ABC)$,

$\Delta SKB = \Delta SAB$ (c.g.c), suy ra $KB = AB$.

Ta cũng có $\widehat{BSC} = \pi - \widehat{CSA}$, nên $\Delta SAB = \Delta SAC$, tức là ΔABC vuông cân.

$$V_{SABC} = \frac{1}{2} \cdot V_{KABC} = \frac{1}{12} KB \cdot AB^2 = \frac{AB^3}{12}.$$

Ta lại thấy

$$dt\Delta KBC = 2dt\Delta SBC = 2a^2,$$

nên $KB \cdot BC = 4a^2$ hay $AB^2\sqrt{2} = 4a^2$

$$\Rightarrow AB^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{2}} = 2a^2\sqrt{2} \Rightarrow AB = a\sqrt{2\sqrt{2}}.$$

$$V_{SABC} = \frac{(a^4\sqrt{8})^3}{12}.$$

Cách 2. Bằng cách suy luận như phần đầu của cách 1, ta suy ra ΔABC vuông cân.

Ta kẻ $HM \perp AB$, $HN \perp AC$, khi đó $SM \perp AB$, $SN \perp AC$.

Đặt $AB = AC = x$, ta có :

$$SM = \sqrt{\frac{x^2}{4} + SH^2}.$$

Mặt khác $SM \cdot AB = SH \cdot BC$,

hay $SM \cdot AB = SH \cdot AB\sqrt{2}$

Vậy $SM = SH\sqrt{2}$.

Bình phương 2 vế :

$$SM^2 = 2SH^2.$$

Suy ra :

$$\frac{x^2}{4} + SH^2 = 2SH^2, \frac{AB^2}{4} = SH^2 \Rightarrow SH = \frac{AB}{2}.$$

Theo giả thiết $SH \cdot BC = 2a^2$.

$$\text{Vậy } \frac{AB^2\sqrt{2}}{2} = 2a^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{4a^2}{\sqrt{2}} = 2a^2\sqrt{2},$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{12} AB^3.$$

Bài 35. Cho hình chóp lục giác đều $SABCDEF$. Mặt phẳng qua AB cắt SC tại M , SD tại N , SE tại P , SF tại Q . Chứng minh rằng 6 điểm A, B, M, N, P, Q không nằm trên cùng một đường tròn.

Giải : Cách 1. Giả sử ngược lại. Gọi I là giao điểm của AB và CD . Khi đó MN qua I . Lục giác $ABCDEF$ nội tiếp trong vòng tròn, nên

$$\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{IC} \cdot \overline{ID}. \quad (1)$$

Mặt khác theo giả thiết phản chứng đa giác $ABMNPQ$ cũng nội tiếp trong vòng tròn, nên ta có :

$$\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overline{IM} \cdot \overline{IN} = \overline{IC} \cdot \overline{ID},$$

và tứ giác MNCD nội tiếp trong vòng tròn.

Ta có :

$$M + D = N + C.$$

Do $\triangle SCD$ cân, nên $M = N$ suy ra $MN \parallel CD$ vô lí !

Cách 2. Giả sử ngược lại. Gọi (K_1) và (K_2) là các vòng tròn ngoại tiếp các lục giác ABCDEF và ABMNPQ. Do (K_1)

và (K_2) có chung đáy AB, nên tồn tại một mặt cầu chứa (K_1) và (K_2) . Do đó mặt SCD cắt mặt cầu này theo vòng tròn qua 4 điểm C, D, M, N.

Lập luận như phần cuối của cách 1 ta được điều phải chứng minh.

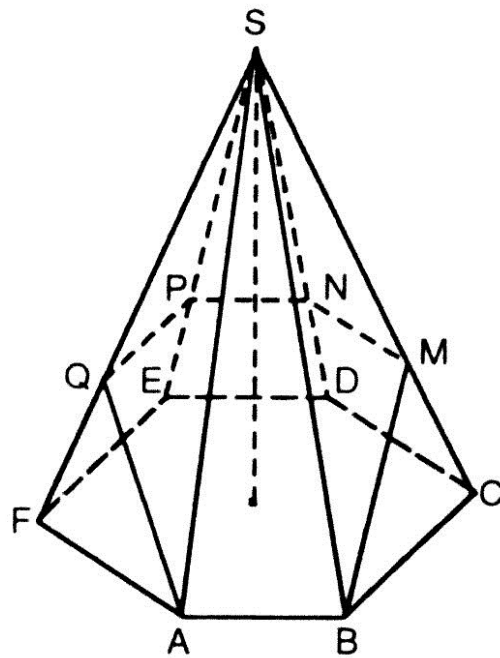
Bài 36. Hãy phát biểu và chứng minh bài toán tương tự cho hình chóp n-giác đều. (Hãy làm theo 2 cách như bài 35).

Bài 37. Trên mặt $A'B'C'D'$ của một hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ ta lấy một điểm S. Xét hình chóp SABCD. Chứng minh rằng nếu S trùng với giao điểm các đường chéo của hình vuông $A'B'C'D'$, thì diện tích xung quanh của hình chóp này là nhỏ nhất.

Giải : Cách 1. Ta kẻ $SP \perp BC$, $SQ \perp AD$, $SM \perp AB$, $SN \perp CD$.

$$S_{xq} = (SP + SQ + SM + SN) \frac{AB}{2}.$$

S_{xq} chỉ phụ thuộc tổng $SP + SQ + SM + SN$.



Hình 197

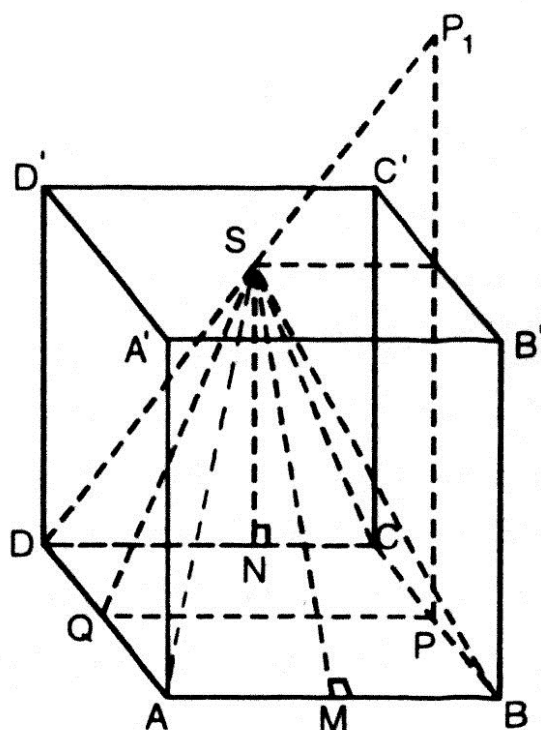
Xét tổng $SP + SQ$.

Gọi B_1C_1 là đoạn thẳng đối xứng với BC qua $B'C'$. Khi đó, tìm được điểm P_1 trên B_1C_1 đối xứng với P qua $B'C'$.

Ta có $PS = P_1S$.

Vì vậy $SQ + PS = SQ + P_1S$. Mặt khác độ dài P_1Q không đổi và bằng $a\sqrt{5}$ ($a = AB$). Vậy $SP = SQ \geq a\sqrt{5}$ $SP + SQ$ nhỏ nhất khi S, P_1, Q thẳng hàng và do đó S thuộc đường thẳng qua trung điểm của $A'B'$ và $C'D'$.

Tương tự $SM + SN$ nhỏ nhất khi S thuộc đường thẳng qua trung điểm của $B'C'$ và $A'D'$.



Hình 198

$SP + SQ + SM + SN$ bé nhất khi $\begin{cases} SP + SQ \\ SM + SN \end{cases}$ bé nhất và S là giao của hai đường nói trên. Trong trường hợp này S trùng với giao hai đường chéo.

Cách 2. Kẻ thêm $SH \perp ABCD$. Nối H với các điểm M, N, P, Q . Khi đó HM, HN, HP, HQ vuông góc với các cạnh hình vuông $ABCD$.

Đặt $AB = a, HM = x, HN = y, HP = z, HQ = t$, ta sẽ có :

$$SM = \sqrt{a^2 + x^2}, SN = \sqrt{a^2 + y^2},$$

$$SP = \sqrt{a^2 + z^2}, SQ = \sqrt{a^2 + t^2}.$$

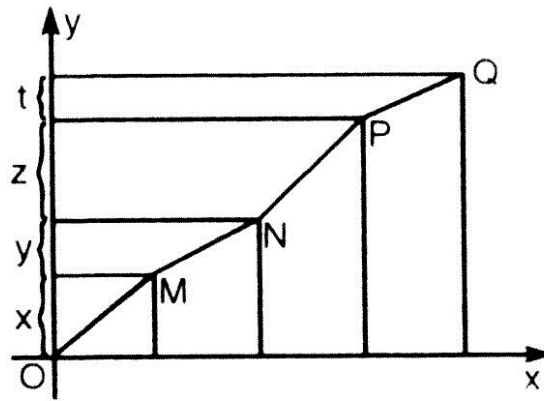
Đồng thời $x + y = z + t = a$.

Xét đường gãy khúc có cạnh SM, SN, SP, SQ (xem hình vẽ).

Ta thấy :

$$\begin{aligned} SM + SN + SP + SQ &= \\ &= |OQ| \geq \text{đoạn thẳng } OQ = \\ &= \sqrt{16a^2 + 4a^2} = a\sqrt{20}. \end{aligned}$$

Vậy $SM + SN + SP + SQ$ đạt min khi $OM = MN = NP = PQ$, hay $x = y = z = t$. Dựa vào bài 37, bạn có thể giải các bài toán sau đây bằng một trong hai cách :



Hình 199

Bài 38. Trên đáy $A'B'C'$ của một lăng trụ tam giác đều $ABCA'B'C'$ ta lấy điểm S . Phải chọn S ở đâu để diện tích xung quanh hình chóp $SABC$ bé nhất.

Bài 39. Trên đáy $A'B'C'$ của một lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ ta chọn điểm S . Hãy chọn vị trí S để diện tích xung quanh hình chóp $SABC$ nhỏ nhất.

PHẦN THỨ BA

MỘT SỐ ĐỀ TOÁN TỰ LUYỆN

Đề số 1

I. Xét hàm số

$$y = \frac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1}$$

a) Xác định m sao cho hàm số có cực đại và cực tiểu. Chứng tỏ rằng khi đó đồ thị của hàm số không thể cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

b) Với mỗi giá trị m tìm được ở phần a). Hãy xác định hệ số góc của đường thẳng đi qua điểm $(-1; 0)$ và tiếp xúc với đồ thị.

c) Xác định m sao cho trên đồ thị có hai điểm đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.

II. Giải phương trình

$$\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \cdot \sin 2x = \cos x.$$

III. Cho hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ x^2 - kx + k \leq 0. \end{cases}$$

a) Với $k = -2$, hãy giải mỗi bất phương trình của hệ, từ đó suy ra nghiệm của hệ.

b) Với những giá trị nào của k thì hệ có nghiệm ?

IV. Trong mặt phẳng P , cho tam giác ABC với góc A vuông và góc C bằng 60° . Dựng các đường thẳng Bx , Cy vuông góc với mặt phẳng P .

a) Xác định điểm M trên Bx sao cho mặt cầu đường kính BM tiếp xúc với Cy, biết $BC = 2a$.

b) L là một điểm di động trên Bx, L phải ở những điểm nào để trên Cy có thể tìm được điểm N sao cho tam giác BLN có góc N vuông ?

c) Trong các vị trí của L nói ở phần b), hãy xác định vị trí sao cho hình chóp ABLNC có thể tích nhỏ nhất.

V. a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

Đề số 2

I. Cho hàm số

$$y = \frac{-2x^2 + (m+2)x + m}{2x - m}$$

trong đó m là tham số ($m \neq 0$).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị ứng với $m = 1$.

b) Tìm các điểm cố định của đồ thị, khi m thay đổi.

c) Với những giá trị nào của m thì hàm số có cực đại và cực tiểu ?

Hãy lập phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị. Có nhận xét gì về đường thẳng ấy ?

II. Giải phương trình

$$2\operatorname{tg}3x - 3\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}^2x \cdot \operatorname{tg}3x.$$

III. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = a \\ y\sqrt{1-x^2} = b. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm, thì ta phải có $|a| + |b| \leq 1$.

b) Ngược lại, hãy chứng tỏ rằng nếu $|a| + |b| \leq$ thì hệ có nghiệm. Hãy giải hệ ấy.

IV. Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD được thành lập từ hai tam giác đều ABD và CBD cạnh a. Cạnh SA của hình chóp có độ dài $SA = a$, và vuông góc với đáy. Gọi O là giao điểm của các đường chéo AC và BD. M là một điểm di động trên AC, Q là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với AC.

a) Nếu M chạy trên OC, thì thiết diện của Q với hình chóp là hình gì? Tính diện tích thiết diện ấy theo $x = MC$. Khi nào thì diện tích ấy lớn nhất?

b) Nếu M chạy trên AO, thì thiết diện của Q với hình chóp là hình gì? Tính diện tích thiết diện ấy theo $t = AM$. Khi nào thì diện tích ấy lớn nhất?

c) Xác định vị trí của M trên toàn bộ AC để Q cắt hình chóp theo thiết diện với diện tích lớn nhất.

d) Tìm lại kết quả trên, nhưng với giả thiết SA có độ dài h tùy ý.

Đề số 3

I. Cho hàm số

$$y = x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2m.$$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -2$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị. Vì sao tại điểm uốn, tiếp tuyến với đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất so với mọi tiếp tuyến khác của đồ thị?

b) Với những giá trị nào của m thì hàm số là đồng biến khi $x \geq 0$?

c) Tìm các điểm cố định của đồ thị và xác định quỹ tích của điểm uốn.

II. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = -3x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 1$$

trên đoạn $[0, 4]$.

III. Giải phương trình

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \sin^2 x}$$

IV. Cho tam giác đều ABC cạnh a , và đường thẳng d vuông góc tại A với mặt phẳng (ABC). M là một điểm di động trên d .

a) Qua trung điểm I của đoạn AB, dựng mặt phẳng vuông góc với MC. Biết $MA = a$, tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng ấy.

b) Gọi H là trực tâm tam giác MBC. Chứng minh rằng đường thẳng Hy, vuông góc với mặt phẳng (MBC) luôn luôn đi qua một điểm cố định, khi M chạy trên d .

c) Đường thẳng Hy cắt d tại điểm N. Chứng minh rằng $AM \cdot AN$ là một đại lượng không thay đổi. Với vị trí nào của M trên d , thì hình cầu ngoại tiếp tứ diện MNBC có bán kính nhỏ nhất ?

V. Biết rằng $5x + 2y = 10$. Chứng minh rằng

$$3xy - x^2 - y^2 \leq \frac{125}{59}.$$

Đề số 4

I. Cho hàm số

$$y = x^4 + 2(2a + 1)x^2 - 3a,$$

trong đó a là tham số.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số khi $a = -3$.

2) Tìm a để đồ thị của hàm số đã cho cắt trục Ox tại bốn điểm tạo thành ba đoạn bằng nhau.

II. Cho phương trình

$$\sin^4 x + (1 + \sin x)^4 = m.$$

- 1) Giải phương trình khi $m = \frac{1}{8}$.
- 2) Giải và biện luận phương trình đã cho.

III. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = 1,$$

a và b là tham số.

IV. Cho một hình chóp tứ giác đều SABCD trong đó cạnh bên làm với mặt phẳng đáy một góc bằng α , cạnh của đáy bằng a.

1) Qua đường chéo AC của đáy dựng một mặt phẳng làm với mặt phẳng đáy một góc bằng β . Tính diện tích của thiết diện theo a, α , β . Với giá trị nào của β , diện tích của thiết diện là nhỏ nhất.

2) Nội tiếp một hình lập phương trong hình chóp sao cho 4 đỉnh của hình lập phương nằm trên mặt phẳng đáy của hình chóp, còn 4 đỉnh kia nằm trên các cạnh bên của hình chóp. Tính thể tích của hình lập phương ấy.

V. Cho một tam giác có các cạnh là a, b, c, các đường cao tương ứng là h_a , h_b , h_c . Với điều kiện nào đối với a, b, c tam giác có ba cạnh bằng h_a , h_b , h_c đồng dạng với tam giác đã cho ?

Đề số 5

I. Cho hàm số $y = \frac{1}{3} m^2 x^3 + \frac{1}{2} (m+1)x^2 -$

$-(m^2 + m - 1)x + m$, trong đó m là tham số.

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đồ thị của hàm số đã cho đều không có điểm uốn tại $x = 1$. Tìm x_0 sao cho tiếp tuyến với đồ thị của hàm số đã cho ứng với mọi m tại điểm có hoành độ x_0 đều song song với nhau

Tính hệ số góc của tiếp tuyến ấy.

II. Trong tam giác ABC, a, b, c là các cạnh đối diện lần lượt với các đỉnh A, B, C, l là đường phân giác trong của góc A. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $A = 120^\circ$ là

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l}.$$

III. Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} x - my = 1, \\ x^2 - xy - 2y^2 - 3y = 0. \end{cases}$$

IV. Cho hai đường thẳng d, d' trực giao với nhau và không cắt nhau. Đường vuông góc chung cắt d ở I, cắt d' ở J. Trên d lấy hai điểm cố định A, B. (P) là mặt phẳng xác định bởi A và d', H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống (P).

1) M là một điểm trên d', N là giao điểm của d' với đường thẳng đi qua H, vuông góc với AM. Chứng minh rằng $AM \perp BN$, $AN \perp BM$.

2) Tìm quỹ tích của chân đường vuông góc hạ từ B xuống AM khi M chạy trên d'.

3) Chứng minh rằng JM.JN không đổi khi M chạy trên d'.

V. Tồn tại chăng các hằng số A, B và các số nguyên dương m, n, để ta có $(5x + 3y - 9)^2 Ax^m y^n + (-x + 2y + 7)^2 Bx^n y^m = 1$, với mọi x, y ?

Đề số 6

I. Cho hàm số : $y = \frac{1}{3} x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3}$.

a) Chứng minh rằng với mọi m hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị của hàm số.

c) Với giá trị nào của m thì khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị là ngắn nhất.

II. Giải phương trình : $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2(\sin 2x + \cos 2x)$.

III. Giải bất phương trình : $\frac{4 + \log_a^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{2 + \log_a\left(\frac{1-x}{1+x}\right)} > 2$, trong đó

a là tham số dương và khác 1.

IV. Trong mặt phẳng P cho tam giác cân AOB , trong đó $OA = OB = 2a$; $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Trên đường vuông góc tại O với mặt phẳng P lấy hai điểm C, D ở hai phía của O sao cho $\triangle ACB$ vuông góc ở C , $\triangle ADB$ đều.

a) Tính OC, OD . Tính thể tích và diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$.

b) Xác định tâm I, J của các đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và ABD . Chứng minh rằng các đường vuông góc tại I và J với các mặt phẳng $(ABC), (ABD)$ gặp nhau tại một điểm trên CD .

V. Chứng minh rằng nếu $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ thì

$$a + b + c + ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{3}.$$

Đề số 7

I. Giải và biện luận phương trình

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1 \quad (a \text{ là tham số}).$$

II. a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x + 1}.$$

b) Với những giá trị nào của m thì phương trình :

$$\sin x + \cos x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = m \text{ có nghiệm.}$$

III. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_{1/2} \left(4^x + 2^x - \frac{3}{2} \right) > 1$;

b) $\log_2(x + 1) + \log_{x+1} 2 \geq \frac{5}{2}$.

IV. Trong mặt phẳng P cho ΔABC . Trên đường thẳng đi qua trực tâm H của ΔABC và vuông góc với mặt phẳng P ta lấy một điểm S. Qua S dựng các đường thẳng $Sx \perp (SBC)$; $Sy \perp (SAC)$; $Sz \perp (SAB)$. Gọi A' , B' , C' là giao điểm của Sx , Sy , Sz với mặt phẳng P. Chứng minh rằng :

a) Các mặt phẳng (SAA') ; (SBB') ; (SCC') cùng đi qua một đường thẳng ;

b) Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng ;

c) Nếu $A'B'C'$ trùng với ABC thì bình phương diện tích tam giác ABC bằng tổng các bình phương các diện tích của tam giác SAB ; SBC ; SCA .

V. Giả sử a , b là những số dương cố định. x , y là những số dương thay đổi nhưng luôn thỏa mãn : $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$.

Hãy xác định x và y sao cho tổng $x + y$ là nhỏ nhất.

LỜI GIẢI CÁC ĐỀ TỰ LUYỆN

Đề số 1

I. a) Ta viết hàm số đã cho dưới dạng :

$$y = x + 2m^2 - 1 + \frac{1 - m^2}{x + 1} .$$

$$y' = 1 - \frac{1 - m^2}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2 - (1 - m^2)}{(x + 1)^2} .$$

Để hàm số đã cho có cực đại, cực tiểu, thì phương trình $y' = 0$ phải có 2 nghiệm phân biệt. Từ đó suy ra :

$$1 - m^2 > 0 \text{ hay : } -1 < m < 1. \quad (1)$$

Các giao điểm của đồ thị với trục hoành $y = 0$ là các nghiệm của phương trình

$$x^2 + 2m^2x + m^2 = 0. \quad (2)$$

$$\Delta' = m^4 - m^2 = m^2(m^2 - 1).$$

Nếu điều kiện (1) được thỏa mãn, thì $\Delta' \leq 0$, suy ra phương trình (2) không thể có hai nghiệm phân biệt, vậy đồ thị của hàm số không thể cắt trục hoành ở hai điểm khác nhau.

b) Đường thẳng đi qua điểm $(-1, 0)$ có dạng : $y = a(x + 1)$. Ta cần xác định hệ số góc a để đường thẳng này tiếp xúc với đồ thị. Nói cách khác, cần xác định a để phương trình

$$\frac{x^2 + 2m^2x + m^2}{x + 1} = a(x + 1) \text{ có nghiệm kép.}$$

hay : $(a - 1)x^2 + 2(a - m^2)x + a - m^2 = 0$ có nghiệm kép

$$\begin{aligned} \Rightarrow a \neq 1 ; \Delta' &= (a - m^2)^2 - (a - 1)(a - m^2) = \\ &= (a - m^2)(1 - m^2) = 0. \end{aligned}$$

Do điều kiện (1) được thỏa mãn nên :

$$1 - m^2 > 0, \text{ suy ra } a = m^2.$$

c) Điều kiện để tồn tại hai điểm $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ trên đồ thị đối xứng với nhau qua gốc tọa độ là :

$$\begin{cases} x_2 = -x_1, \\ y_2 = -y_1, \\ y_1 = x_1 + 2m^2 - 1 + \frac{1 - m^2}{x_1 + 1}, \\ y_2 = x_2 + 2m^2 - 1 + \frac{1 - m^2}{x_2 + 1}. \end{cases}$$

Vậy phải tồn tại x_1 sao cho :

$$x_1 + 2m^2 - 1 + \frac{1 - m^2}{x_1 + 1} = - \left(-x_1 + 2m^2 - 1 + \frac{1 - m^2}{-x_1 + 1} \right),$$

$$\text{hay } (2m^2 - 1)x_1^2 = m^2.$$

Điều kiện tồn tại x_1 là : $2m^2 - 1 > 0$,

$$\text{hay } \begin{cases} m > \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ m < -\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \quad m \neq \pm 1.$$

II. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\frac{1}{2} \cos 2x + \sin x \sin 2x = \cos x,$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} \cos 2x + 2\sin^2 x \cos x - \cos x = 0,$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x (2\sin^2 x - 1) = 0,$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \cos 2x = 0,$$

$$\text{hay } \cos 2x \left[\frac{1}{2} - \cos x \right] = 0. \text{ Từ đó ta có :}$$

a) Hoặc $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, (k nguyên tùy ý).

b) Hoặc $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2l\pi$, (l nguyên tùy ý).

III. a) Khi $k = -2$, hệ bất phương trình có dạng :

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0, \\ x^2 + 2x - 2 \leq 0. \end{cases}$$

Bất phương trình đầu có nghiệm $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Bất phương trình thứ hai có nghiệm

$$-1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}.$$

Vậy nghiệm của hệ : $\frac{1}{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}.$

b) Điều kiện để hệ $\begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0 \\ x^2 - kx + k \leq 0 \end{cases}$ có nghiệm tương đương với điều kiện để bất phương trình :

$$f(x) = x^2 - kx + k \leq 0 \quad (1)$$

phải có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 3\right].$

Nhận xét rằng bất phương trình (1) có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, khi và chỉ khi giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ là ≤ 0 . (Bạn đọc tự chứng minh lấy).

Trường hợp 1 : Khi $\frac{1}{2} < \frac{k}{2} < 3$, hay $1 < k < 6$, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ bằng $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{4k - k^2}{4}$.

Vậy phải có $4k - k^2 \leq 0 \Leftrightarrow k \geq 4$, hoặc $k \leq 0$.

Kết hợp ta nhận được $4 \leq k < 6$,

Trường hợp 2 : Khi $\frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$, tức là $k \leq 1$, thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt tại $x = \frac{1}{2}$. Suy ra :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}k + k = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$k \leq -\frac{1}{2}.$$

Trường hợp 3 : Khi $\frac{k}{2} \geq 3$, hay $k \geq 6$, thì giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ đạt tại $x = 3$.

Suy ra : $f(3) = 9 - 3k + k = 9 - 2k \leq 0$ hay $k \geq \frac{9}{2}$. Kết hợp các kết quả trên, ta được : $k \geq 6$.

Đáp số : $k \leq -\frac{1}{2}$ hoặc $k \geq 4$.

IV. a) Mặt cầu đường kính BM tiếp xúc với Cy khi và chỉ khi khoảng cách giữa Bx và Cy chính là bán kính của nó $\Rightarrow BM = 4a$. Có hai điểm M_1, M_2 trên đường Bx thỏa mãn điều kiện này.

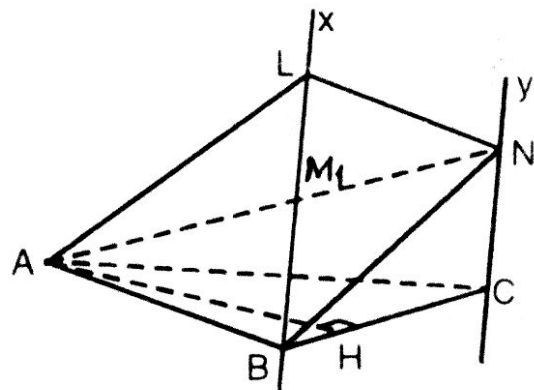
b) Muốn có điểm N để $\widehat{BNL} = \pi/2$, thì mặt cầu đường kính BL phải cắt Cy, $\Rightarrow BL \geq 4a \Rightarrow L$ phải nằm ngoài khoảng (M_1, M_2) . Để chứng minh được rằng : nếu L nằm ngoài đoạn $[M_1, M_2]$, thì với mỗi điểm L sẽ có điểm N_1, N_2 thuộc By để

$$\widehat{BN_1L} = \widehat{BN_2L} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Đặt $BL = y, CN = x$. Do tam giác BNL vuông tại N, nên $BL^2 = BN^2 + NL^2 \Rightarrow y^2 = 4a^2 + x^2 + 4a^2 + (y - x)^2 =$

$$= 8a^2 - 2xy + y^2 + 2x^2, \text{ từ đó}$$

$$y = \frac{4a^2 + x^2}{x}. \quad (1)$$



Hình 200

Hạ đường cao AH của tam giác ABC. Để thấy AH cũng là đường cao của hình chóp ABLNC và $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Đáy BLNC là hình thang vuông, nên

$$\begin{aligned} v(\text{ABLNC}) &= \frac{1}{3} AH \cdot \frac{1}{2} BC(CN + BL) = (x + y) \frac{a^2\sqrt{3}}{6} = \\ &= \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \left(x + \frac{4a^2 + x^2}{x} \right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{2a^2}{x} + x \right) \geq \\ &\geq \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \cdot 2\sqrt{\frac{2a^2}{x} \cdot x} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{3} \\ \Rightarrow V_{\min} &= \frac{2a^3\sqrt{6}}{3}, \end{aligned}$$

đạt được khi

$$\frac{2a^2}{x} = x \text{ hay } x = a\sqrt{2}, \text{ và từ đó } y = 3a\sqrt{2}.$$

Giá trị $y = BL = 3a\sqrt{2} > 4a$ nên chấp nhận được.

V. Đặt $a + b + c = p$, $b + c = x$, $a + c = y$, $b + a = z$, thì $x, y, z > 0$ và $a = p - x$; $b = p - y$; $c = p - z$.

Khi đó bất đẳng thức có dạng :

$$\frac{(p-x)^2}{x} + \frac{(p-y)^2}{y} + \frac{(p-z)^2}{z} > \frac{p}{2}$$

hay

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

Đề số 2

$$I. y = \frac{-2x^2 + (m+2)x + m}{2x - m}.$$

a) Đề nghị bạn đọc tự giải.

b) Giả sử $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định, lúc đó

$$y_0 = \frac{-2x_0^2 + (m+2)x_0 + m}{2x_0 - m}, \text{ với mọi } m \neq 2x_0,$$

$$\text{hay } 2x_0 y_0 - y_0 m = -2x_0^2 + x_0 m + 2x_0 + m, \forall m \neq 2x_0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 1 + y_0)m + (-2x_0^2 + 2x_0 - 2x_0 y_0) = 0, \text{ với mọi } m \neq 2x_0.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_0 + 1 + y_0 = 0, \\ -2x_0^2 + 2x_0 - 2x_0 y_0 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Nếu $x_0 = 0$, thì từ phương trình đầu của (1), ta có $y_0 = 1$.
Đó là một nghiệm.

Nếu $x_0 \neq 0$, thì từ (1) ta có :

$$\begin{cases} x_0 + 1 + y_0 = 0, \\ -x_0 + 1 - y_0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy $A(0 ; -1)$ là điểm cố định duy nhất.

$$c) \quad y = -x + 1 + \frac{2m}{2x - m};$$

$$y' = -1 - \frac{4m}{(2x - m)^2} = \frac{-(2x - m)^2 - 4m}{(2x - m)^2}.$$

$$\text{Điều kiện có cực đại, cực tiểu : } m < 0. \quad (2)$$

Phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu :
Giả sử (2) được thỏa mãn, lúc đó đồ thị có các điểm cực đại, cực tiểu :

$$\begin{aligned} \text{Cực đại : } x_1 &= \frac{m}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-2m}; \quad y_1 = -x_1 + 1 = \frac{2m}{2x_1 - m} \\ &= -x_1 + 1 - \sqrt{-2m} \end{aligned}$$

$$\text{Cực tiểu : } x_2 = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-2m};$$

$$y_2 = -x_2 + 1 + \frac{2m}{2x_2 - m} = -x_2 + 1 + \sqrt{-2m}.$$

$$\text{Tâm đối xứng : } x_3 = \frac{m}{2}; \quad y_3 = -\frac{m}{2} + 1.$$

Phương trình đường thẳng phải tìm :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ;$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -3$$

hay : $y = -3x + 3x_1 + y_1 \Rightarrow y = -3x + m + 1.$

Ta nhận xét rằng đường thẳng này đi qua tâm đối xứng.

II. $2\operatorname{tg}3x - 3\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}^2 2x \cdot \operatorname{tg}3x.$

Điều kiện $\cos 3x \neq 0$ hay $3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$

hay $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ (k nguyên) và $\cos 2x \neq 0$

hay $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, hay $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$ (k nguyên).

Ta có :

$$2(\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}2x) = \operatorname{tg}2x(1 + \operatorname{tg}2x \cdot \operatorname{tg}3x)$$

$$\Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x(1 + \operatorname{tg}2x \cdot \operatorname{tg}3x) = \operatorname{tg}2x(1 + \operatorname{tg}2x \operatorname{tg}3x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \operatorname{tg}2x \cdot \operatorname{tg}3x) \cdot (2\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}2x) = 0. \text{ Ta có :}$$

a) Hoặc $1 + \operatorname{tg}2x \cdot \operatorname{tg}3x = 0,$

hay $\sin 2x \sin 3x + \cos 2x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(3x - 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

k nguyên, bị loại vì trái với điều kiện $\cos 3x \neq 0.$

b) Hoặc $2\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}2x = \frac{2\operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x(1 - \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\operatorname{tg}x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ (k nguyên tùy ý).

III. Giả sử $\begin{cases} x\sqrt{1-y^2} = a \\ y\sqrt{1-x^2} = b \end{cases}$ có nghiệm x_0, y_0 , khi đó :

$$\begin{cases} x_0 \sqrt{1 - y_0^2} = a, \\ y_0 \sqrt{1 - x_0^2} = b, \end{cases} \quad y_0^2 \leq 1 ; x_0^2 \leq 1.$$

Đặt

$$\begin{cases} x_0 = \sin \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ y_0 = \sin \beta, & -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{khi đó} \quad \begin{cases} \sin \alpha \cdot \cos \beta = a, \\ \cos \alpha \cdot \sin \beta = b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } |a| + |b| &= |\sin \beta| \cos \alpha + |\sin \alpha| \cos \beta = \\ &= \sin |\beta| \cos |\alpha| + \sin |\alpha| \cos |\beta| = \sin(|\alpha| + |\beta|) \leq 1. \end{aligned}$$

b) Giả sử $|a| + |b| \leq 1$.

$$\text{Đặt} \quad \begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \sin \beta, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha, \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Khi đó : } \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = a \\ \sin \beta \cos \alpha = b. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra} \quad \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = a + b \\ \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = a - b \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = a + b \\ \sin(\alpha - \beta) = a - b. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt} \quad \begin{cases} a + b = \sin u \\ a - b = \sin v \end{cases} \quad \text{thì} \quad \begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin u \\ \sin(\alpha - \beta) = \sin v \end{cases} \\ -\frac{\pi}{2} \leq u ; v \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = u \\ \alpha - \beta = v \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \pi - u \\ \alpha - \beta = \pi - v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(u + v) \\ \beta = \frac{1}{2}(u - v) \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} x = \sin \frac{u + v}{2}, \\ y = \sin \frac{u - v}{2}. \end{cases}$$

IV. a) (Hình 201) Kẻ $OK \parallel AS$ ($K \in SC$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Do } OK \perp AC \\ \text{và } BD \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (KBD).$$

Vậy Q là mặt phẳng song song với $(KBD) \Rightarrow$ khi $M \in [OC]$ thì Q cắt hình chóp theo mặt cắt là một tam giác cân IEF đồng dạng với tam giác cân KBD theo tỷ số

$$\frac{CM}{CO} = \frac{x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{a\sqrt{3}}. \text{ Do đó}$$

$$s_{mc} = \left(\frac{2x}{a\sqrt{3}} \right)^2 \cdot s(KBD) =$$

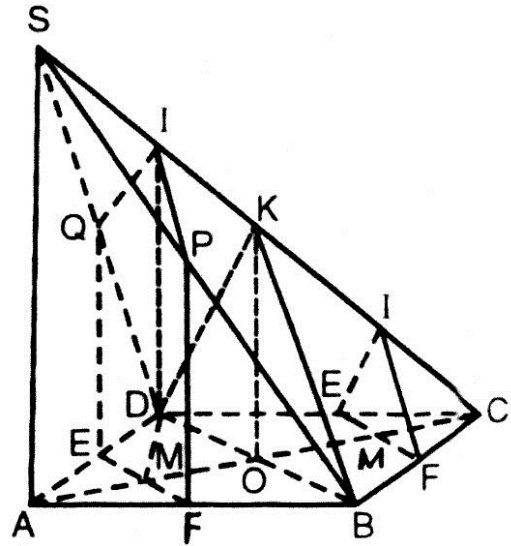
$$= \left(\frac{2x}{a\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} BD \cdot OK =$$

$$= \frac{4x^2}{3a^2} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{h}{2} = \frac{hx^2}{3a}; \text{ (} s_{mc} \text{ là diện tích mặt cắt).}$$

Khi M chuyển động trong đoạn này thì $0 \leq x \leq OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, nên diện tích s_{mc} lớn nhất khi $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ($M \equiv O$) và

$$(s_{mc})_{\max} = \frac{ah}{4}.$$

b) Khi $M \in (OA)$ thì mặt cắt là ngũ giác $EFPIQ$ (hình vẽ) có $EF \parallel PQ \parallel BD$, $MI \parallel FP \parallel EQ \parallel SA$. Mặt cắt này có MI làm



Hình 201

trục đối xứng. MI chia mặt cắt thành 2 hình thang vuông bằng nhau MFPI và MEQI.

$$\Rightarrow S_{mc} = 2s(MFPI) = MF.(MI + FP) \quad (1)$$

$$\Rightarrow S_{mc} = \frac{t}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{(a\sqrt{3} - t + a\sqrt{3} - 2t)}{a\sqrt{3}} \cdot h$$

$$= \frac{h}{9a} (3t(2a\sqrt{3} - 3t) \leq$$

$$\leq \frac{h}{9a} \left[\frac{3t + 2a\sqrt{3} - 2t}{2} \right]^2 = \frac{h}{9a} \cdot \frac{12a^2}{4} = \frac{ah}{3}$$

$$\Rightarrow (S_{mc})_{\max} = \frac{ah}{3}, \text{ đạt được khi } 3t = 2a\sqrt{3} - 3t \Rightarrow t = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(Q đi qua tâm tam giác đều ABD).

c) So sánh kết quả hai phần a, b, ta được diện tích mặt cắt lớn nhất là $\frac{ah}{3}$, đạt được khi Q đi qua tâm của tam giác đều ABD.

Chú ý. Nếu SA = a (h = a), thì mặt cắt phần a) là tam giác vuông cân (vì tam giác KBD vuông cân :

$$OK = a/2 = \frac{1}{2} BD).$$

Đề số 3

I. $y = x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2m.$

a) Khả sát khi $m = -2$:

$$y = x^3 + 2x^2 - 4.$$

Khoảng xác định : Mọi x.

Chiều biến thiên :

$$x = 0, y(0) = -4$$

$$y' = 3x^2 + 4 ; y' = 0$$

$$x = -\frac{4}{3}, y\left(-\frac{4}{3}\right) = -3 + \frac{5}{27} ;$$

$$y'' = 6x + 4, y'' = 0 \text{ khi } x = -\frac{2}{3}, y\left(-\frac{2}{3}\right) = -4 + \frac{16}{27}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	cd $-3 + \frac{5}{27}$	u $-4 + \frac{16}{27}$	ct -4	$+\infty$	

Đồ thị.

Nhận xét rằng : Khi $x < -\frac{2}{3}$ thì $y'' < 0$, nên y' nghịch biến trong khoảng này.

Khi $x > -\frac{2}{3}$, thì $y'' > 0$, nên y' đồng biến trong khoảng này.

Vậy $x = -\frac{2}{3}$ là hoành độ cực tiểu duy nhất của hàm số y' , vậy nó cũng là hoành độ giá trị nhỏ nhất của y' .

b) m bằng bao nhiêu thì hàm số đồng biến khi $x \geq 0$.

Theo giả thiết thì $y' \geq 0$ khi $x \geq 0$.

Tức là : $y' = 3x^2 - 4mx + m + 2 \geq 0$, khi $x \geq 0$.

Trường hợp 1 : Khi $\frac{4m}{6} = \frac{2m}{3} \leq 0$, tức là $m \leq 0$, để $y' \geq 0$ khi $x \geq 0$, ta phải có :

$$y'(0) = m + 2 \geq 0, \text{ tức } m \geq -2,$$

suy ra : $-2 \leq m \leq 0$.

Trường hợp 2 : Khi $\frac{2m}{3} > 0$, tức là $m > 0$, thì để $y' \geq 0$, khi $x \geq 0$, ta phải có :

$$y' \left(\frac{2m}{3} \right) = -\frac{\Delta'}{4} = -\frac{4m^2 - 3m - 6}{3} \geq 0,$$

$$\text{hay } 4m^2 - 3m - 6 \leq 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{105}}{8} \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{105}}{8}.$$

$$\text{Suy ra } 0 < m \leq \frac{3 + \sqrt{105}}{8}.$$

$$\text{Đáp số : } -2 \leq m \leq \frac{3 + \sqrt{105}}{8}.$$

c) Giả sử $A(x_0, y_0)$ là điểm cố định, khi đó :

$$y_0 = x_0^3 - mx_0^2 + (m + 2)x_0 + 2m, \forall m \Leftrightarrow$$

$$(-x_0^2 + x_0 + 2)m + x_0^3 + 2x_0 - y_0 = 0, \forall m.$$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} -x_0^2 + x_0 + 2 = 0, \\ x_0^3 + 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = -3 \end{cases}$$

$$\text{hoặc : } \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = 12. \end{cases}$$

$$\text{Đáp số : } A_1(-1, -3) ; A_2(2, 12).$$

$$\text{Điểm uốn : } y' = 3x^2 - 2mx + m + 2,$$

$$y'' = 6x - 2m.$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m}{3} \Rightarrow m = 3x, \\ y = x^3 - mx^2 + (m + 2)x + 2m. \end{cases}$$

Quỹ tích điểm uốn :

$$y = x^3 - 3x^3 + (3x + 2)x + 6x = -2x^3 + 3x^2 + 8x.$$

$$\begin{aligned} \text{II. Ta có } f'(x) &= 36x + 24x^2 - 12x^3 = \\ &= 12x(3 + 2x - x^2). \end{aligned}$$

Khi $0 \leq x \leq 4$, thì $12x \geq 0$.

Ta có $f'(x) = 0$, khi $x = 0$; $x = -1$; $x = 3$.

Suy ra :

x	0	3	4	
f'(x)	0	+	0	-
f(x)	1	136	33	

Vậy : $\max f(x) = 136$, $\min f(x) = 1$.

III. Giải phương trình :

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \sin^3 x}.$$

Điều kiện $\cos x \neq 0$, hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, với mọi k nguyên và

$1 + \sin^3 x \neq 0$, hay $\sin x \neq -1$ hay $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, với mọi k nguyên.

Kết hợp : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, với mọi k nguyên.

$$\text{Ta có : } \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x},$$

vậy phương trình đã cho có dạng :

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \cos^3 x}{1 + \sin^3 x} \Leftrightarrow$$

$$(1 - \cos^2 x)(1 + \sin^3 x) = (1 - \sin^2 x)(1 + \cos^3 x)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin^3 x - \cos^2 x - \sin^3 x \cos^2 x =$$

$$= 1 + \cos^3 x - \sin^2 x - \sin^2 x \cos^3 x$$

$$\Leftrightarrow (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) -$$

$$- \sin^2 x \cos^2 x (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin x - \cos x) \cdot [1 + \sin x \cos x + \sin x + \cos x - \sin^2 x \cos^2 x] = 0.$$

Ta có :

$$a) \text{ Hoặc : } \sin x - \cos x = 0, \text{ hay } \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 0,$$

$$\text{hay } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ (k nguyên tùy ý).}$$

$$b) \text{ Hoặc : } 1 + \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x \cos^2 x = 0.$$

$$\text{Ta có : } \sin x \cos x = \frac{1}{2} [(\sin x + \cos x)^2 - 1] =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1).$$

$$\text{Vậy } (1 + \sin x + \cos x) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (\sin x + \cos x - 1) - \frac{1}{4} (\sin x + \cos x + 1)(\sin x + \cos x - 1)^2 \right] = 0. \text{ Ta có :}$$

$$\alpha) \text{ Hoặc : } 1 + \sin x + \cos x = 0, \text{ hay } \sin x + \cos x = -1$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Từ đó suy ra :

$$x_1 = \pi + 2k_1\pi,$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi \text{ (} k_1 \text{ và } k_2 \text{ nguyên tùy ý).}$$

$$\beta) \text{ Hoặc : } 1 + \frac{1}{2} (\sin x + \cos x - 1) - \frac{1}{4} (\sin x + \cos x + 1) \cdot (\sin x + \cos x - 1)^2 = 0.$$

Đặt $\sin x + \cos x = t$, ta có :

$$1 + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (t + 1)(t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(t + 1) - (t + 1)(t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(t + 1)[2 - (t - 1)^2] = 0$. Từ đó ta có hoặc $t + 1 = 0$ hay $1 + \sin x + \cos x = 0$.

Phương trình này đã được xét ở trên.

$$\text{Hoặc } (t - 1)^2 = 2 \Rightarrow (t - 1) = \pm \sqrt{2} ;$$

hay $\sin x + \cos x = 1 \pm \sqrt{2}$. Xét hai trường hợp :

$$1) \sin x + \cos x = 1 + \sqrt{2}, \text{ vô nghiệm.}$$

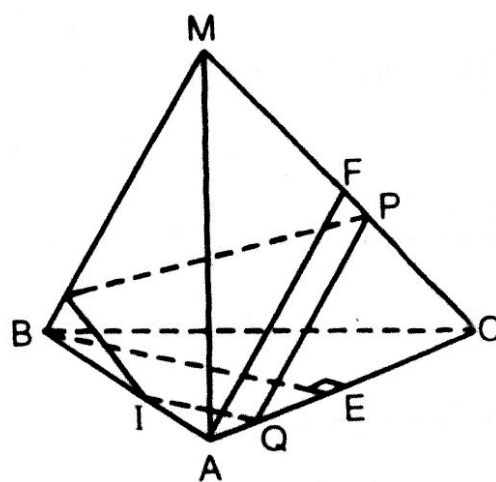
$$2) \sin x + \cos x = 1 - \sqrt{2}, \text{ tương đương với}$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 2}{2} = \cos \varphi \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \varphi + 2m\pi, \text{ (m nguyên tùy ý).}$$

IV. a) (Hình 202). Lấy các điểm giữa E của AC, F của MC, I của AB.

Dễ thấy $BE \perp (MAC)$, nên $BE \perp MC$, và $AF \perp MC$. Do đó các mặt phẳng vuông góc với MC sẽ song song BE, AF. Vậy nếu kẻ $IQ \parallel BE$ ($Q \in AC$), $QP \parallel AF$ ($P \in MC$) thì (IQP) là mặt phẳng qua I, vuông góc



Hình 202

Khi đó $S \in (ABC)$. Suy ra $AM = AN = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

V. Từ hệ thức $5x + 2y = 10$, ta suy ra :

$$y = 5 - \frac{5}{2}x.$$

Vậy ta cần chứng minh bất đẳng thức :

$$3x \left(5 - \frac{5}{2}x \right) - x^2 - \left(5 - \frac{5}{2}x \right)^2 \leq \frac{125}{59},$$

$$\text{hay} \quad -\frac{59}{4}x^2 + 40x - \frac{25 \cdot 64}{59} \leq 0. \quad (1)$$

Xét tam thức bậc hai

$$f(x) = -\frac{59}{4}x^2 + 40x - \frac{25 \cdot 64}{59},$$

$$\text{ta có} \quad \Delta' = 20^2 - \frac{59}{4} \cdot \frac{25 \cdot 64}{59} = 20^2 - 25 \cdot 16 = 0.$$

Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{80}{59}$.

Đề số 4

I. Phân khảo sát và vẽ đồ thị bạn đọc tự giải.

Để đồ thị cắt trục hoành tại bốn điểm cách đều nhau thì phương trình $x^4 + 2(2a + 1)x^2 - 3a = 0$ phải có bốn nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ sao cho $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$ hay phương trình $t^2 + 2(2a + 1)t - 3a = 0$ phải có hai nghiệm dương t_1 và t_2 sao cho $0 < t_1 < t_2$ và $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = \sqrt{t_1} - (-\sqrt{t_1}) = (-\sqrt{t_1}) - (-\sqrt{t_2})$, (ở đây $x_{1,4} = \pm \sqrt{t_2}$; $x_{2,3} = \pm \sqrt{t_1}$). Muốn vậy ta phải có $t_2 = 9t_1 > 0$. Nghiệm $t_{1,2} = -(2a + 1) \pm \sqrt{4a^2 + 7a + 1}$. Muốn có $t_2 = 9t_1$, ta phải có $-2a - 1 +$

$$\sqrt{4a^2 + 7a + 1} = 9(-2a - 1 - \sqrt{4a^2 + 7a + 1})$$

hay
$$12a^2 + 37a + 3 = 0.$$

Từ đó suy ra $a_1 = -3$; $a_2 = -\frac{1}{12}$. Nhưng bằng phép thử ta thấy chỉ có $a_1 = -3$ thỏa mãn điều kiện $t_1, t_2 > 0$. Vậy $a = -3$ là giá trị phải tìm.

II. Ta phải giải phương trình

$$\sin^4 x + (1 + \sin x)^4 = m. \quad (1)$$

Đặt $t = \sin x + \frac{1}{2}$, khi đó phương trình có dạng mới :

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t + \frac{1}{2}\right)^4 = m, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}.$$

Khai triển và rút gọn, ta được

$$2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8} - m = 0. \quad (2)$$

1) Nếu $m = \frac{1}{8}$, thì ta được $t = 0$, từ đó $\sin x = -\frac{1}{2}$ và suy ra nghiệm của (1) là

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi ; x_2 = 7\frac{\pi}{6} + 2k_2\pi ; k_1, k_2 \text{ nguyên tùy ý.}$$

2) Phương trình (2) là phương trình trùng phương.

Đặt $t^2 = z$ ta được $2z^2 + 3z + \frac{1}{8} - m = 0$, với điều kiện $0 \leq z \leq \frac{9}{4}$ ta có $\Delta = 8(m + 1)$.

a) Nếu $m < -1$, phương trình vô nghiệm.

b) Nếu $m = -1$ phương trình có nghiệm kép.

$$z = -\frac{3}{4} \text{ (loại).}$$

c) Nếu $m > -1$, thì $z_{1,2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2(m+1)}}{4}$

Chỉ có nghiệm $z_1 = \frac{-3 + 2\sqrt{2(m+1)}}{4}$ mới có thể thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Với $z_1 = \frac{-3 + 2\sqrt{2m+2}}{4}$, đồng thời vì điều kiện $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ tương đương với $|t| \leq \frac{1}{2}$ hoặc

$\frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2}$, nên ta xét các trường hợp phụ sau đây :

Nếu $0 \leq z_1 \leq \frac{1}{4}$, hay $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$, thì $t_{1,2} = \pm \sqrt{z_1}$ đều thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Khi đó

$\sin x = \pm \sqrt{z_1} - \frac{1}{2}$; $x_{1,2} = \arcsin\left(\pm \sqrt{z_1} - \frac{1}{2}\right) + 2k_{1,2}\pi$,
 $x_{3,4} = \pi - \arcsin\left(\pm \sqrt{z_1} - \frac{1}{2}\right) + 2k_{3,4}\pi$; $k_{1,2,3,4}$ là các số nguyên tùy ý.

Nếu $\frac{1}{4} < z_1 \leq \frac{9}{4}$, hay $1 < m \leq 17$, thì chỉ có $t_2 = \sqrt{z_1}$ là thỏa mãn điều kiện : $\frac{1}{2} < t \leq \frac{3}{2}$. Khi đó phương trình chỉ có nghiệm :

$$x_2 = \arcsin\left(\sqrt{z_1} - \frac{1}{2}\right) + 2k_2\pi \text{ và}$$

$$x_4 = \pi - \arcsin\left(\sqrt{z_1} - \frac{1}{2}\right) + 2k_4\pi.$$

Tóm lại :

Nếu $m < \frac{1}{8}$, hoặc $m > 17$, phương trình vô nghiệm. Nếu $\frac{1}{8} \leq m \leq 1$, phương trình có 4 họ nghiệm $x_{1,2,3,4}$ như xác định ở trên.

Nếu $1 < m \leq 17$, phương trình có 2 họ nghiệm $x_{2,4}$ như xác định ở trên.

$$\text{III. } \sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x+b} = 1. \quad (1)$$

Đặt $y = \sqrt[3]{x+a}$; $z = \sqrt[3]{x+b}$; khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y - z = 1, \\ y^3 - z^3 = a - b ; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} y - z = 1, \\ (y - z)(y^2 + yz + z^2) = a - b ; \end{cases}$$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} y - z = 1, \\ 1 + 3yz = a - b. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Từ (2) ta có $y = z + 1$ và thay vào (3) ta được

$$3z^2 + 3z + 1 + b - a = 0, \quad (4)$$

$$\Delta = 3(4a - 4b - 1).$$

Nếu $a - b < \frac{1}{4}$, thì $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm. Nếu $a - b = \frac{1}{4}$, thì $\Delta = 0$, $z = -\frac{1}{2}$; từ đó

$$x = -\frac{1}{8} - b.$$

Nếu $a - b > \frac{1}{4}$, thì $\Delta > 0$, $z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{\Delta}}{6}$;

từ đó
$$x_{1,2} = \left(\frac{-3 \pm \sqrt{\Delta}}{6} \right)^3 - b.$$

IV. 1) (Hình 204). Thiết diện cắt SD hoặc SB. Giả sử cắt SD ở E. Khi đó dễ thấy $\widehat{HE} \perp CD$ và $CD \perp HD$, do đó $\widehat{EHD} = \beta$. Dễ thấy $\widehat{SDH} = \alpha$. Theo định lý hàm số sin, ta có

$$\frac{HD}{\sin \widehat{HED}} = \frac{HE}{\sin \alpha},$$

hay
$$\frac{a\sqrt{2}}{2\sin(\alpha + \beta)} = \frac{HE}{\sin \alpha},$$

hay
$$HE = \frac{a\sqrt{2}\sin \alpha}{2\sin(\alpha + \beta)}.$$

Từ đó

$$S_{td} = \frac{1}{2} CA \cdot HE = \frac{a^2 \sin \alpha}{2\sin(\alpha + \beta)}.$$

Muốn diện tích này nhỏ nhất thì $\sin(\alpha + \beta)$ phải lớn nhất, hay $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, hay $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

2) (Hình 205). Theo định lý Ta-lét ta có

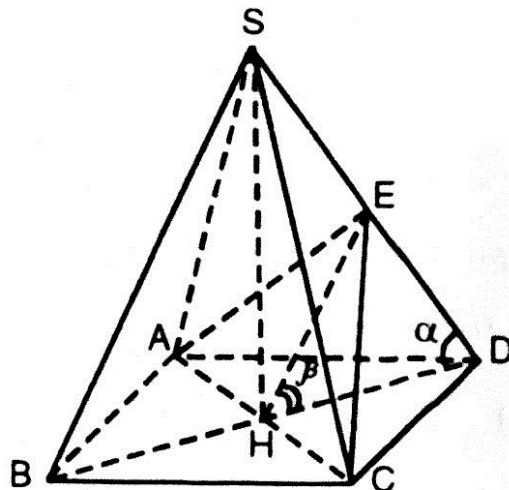
$$\frac{MN}{AB} = \frac{SN}{SB}; \text{ từ đó}$$

$$MN = \frac{AB \cdot SN}{SB}.$$

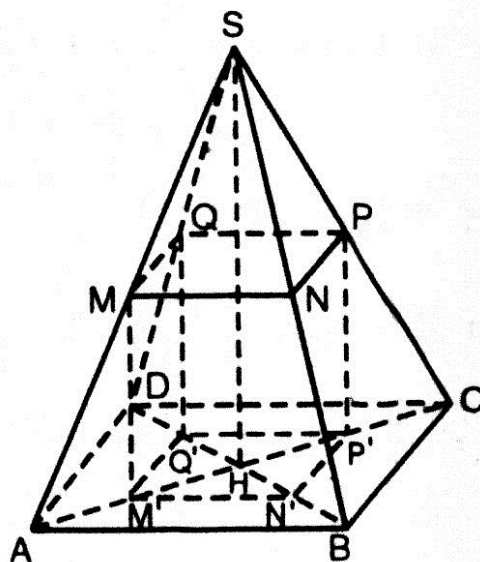
Ta lại có

$$\frac{NN'}{SH} = \frac{NB}{SB}; \text{ từ đó}$$

$$NN' = \frac{SH \cdot NB}{SB}.$$



Hình 204



Hình 205

Nhưng $MN = NN'$, nên

$$\frac{AB \cdot SN}{SB} = \frac{SH \cdot NB}{SB};$$

từ đó
$$\frac{SN}{NB} = \frac{SH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha}{a} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2}.$$

Từ đó
$$\frac{SN}{SB} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2 + \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha}.$$

Vậy $MN = \frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2 + \sqrt{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha}$ và thể tích hình lập phương là

$$V_{lp} = \left(\frac{a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2 + \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha} \right)^3 = \frac{a^3\operatorname{tg}^3\alpha}{(\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha)^3}.$$

V. Để thấy tam giác đều thì $a = b = c$ và $h_a = h_b = h_c$ và tam giác có 3 cạnh bằng h_a, h_b, h_c là đồng dạng với tam giác đã cho.

Nếu $a \leq b \leq c$ thì, do $ab_a = bh_b = ch_c$, nên $h_c \leq h_b \leq h_a$. Muốn tam giác có 3 cạnh h_a, h_b, h_c đồng dạng với tam giác đã cho thì phải có $\frac{a}{h_c} = \frac{b}{h_b} = \frac{c}{h_a}$, hay $\frac{ac}{ch_c} = \frac{b^2}{bh_b} = \frac{ac}{ah_a}$, hay $b^2 = ac$. Vì vai trò a, b, c như nhau, nên ta có các kết luận tương tự $a^2 = bc, c^2 = ab$.

Tóm lại để tam giác tạo bởi ba đường cao h_a, h_b, h_c đồng dạng với chính tam giác đó ta phải có một cạnh là trung bình nhân của hai cạnh còn lại. (Trường hợp tam giác đều chỉ là một trường hợp riêng của điều kiện ấy).

Đề số 5

I. 1) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 1.$$

(Học sinh tự giải).

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } y' &= m^2x^2 + (m+1)x - (m^2 + m - 1), \\ y'' &= 2m^2x + (m+1). \end{aligned}$$

Khi $x = 1$, $y'' = 2m^2 + m + 1$ là một tam thức bậc hai đối với m , có biệt thức $\Delta = -7 < 0$, nên y'' không thể triệt tiêu. Vậy hàm số đã cho không có điểm uốn tại $x = 1$.

Ta viết lại y' dưới dạng :

$$y' = (x^2 - 1)m^2 + (x - 1)m + (x + 1).$$

Ta thấy ngay khi $x = 1$, thì y' không phụ thuộc vào m . Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$) luôn bằng 2, với mọi m , tức là các tiếp tuyến đều song song với nhau.

Vậy $x_0 = 1$ là giá trị phải tìm ; hệ số góc phải tìm là 2.

II. Cách 1. Với mọi tam giác ABC ta luôn có với AD là đường phân giác trong của góc A :

$$dt(ABD) + dt(ACD) = dt(ABC),$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} c \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} b \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A, \text{ hay}$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{1}. (*) \text{ Vậy nếu } A = 120^\circ \text{ thì}$$

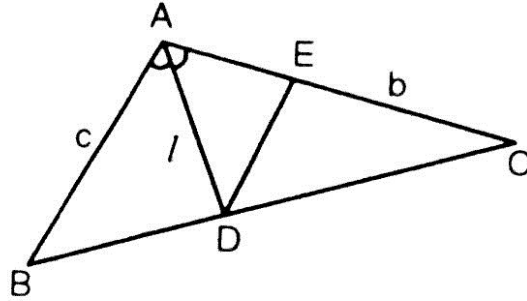
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1}.$$

Ngược lại nếu có

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1},$$

từ (*) ta có :

$$\cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \text{ hay } A = 120^\circ.$$



Cách 2. Với một $\triangle ABC$ tùy ý, vẽ đường phân giác

Hình 206

AD, và $DE \parallel AB$ (hình 206), khi đó $\triangle ADE$ cân tại E. Từ đó $DE = AE$. Mặt khác theo định lý Ta-lét ta luôn có :

$$\frac{AE}{AC} + \frac{DE}{AB} = \frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1,$$

$$\text{hay} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{DE}.$$

$A = 120^\circ$ khi và chỉ khi $\triangle ADE$ đều, hay $DE = 1$, hay khi và chỉ khi $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1}$.

III. Ta có $x = my + 1$. Thế vào phương trình thứ hai ta được :

$$(m^2 - m - 2)y^2 + 2(m - 2)y + 1 = 0. \quad (1)$$

a) Nếu $m^2 - m - 2 = 0$ hay $m = -1$, $m = 2$, thì phương trình (1) có dạng $2(m - 2)y + 1 = 0$.

Khi $m = -1$, thì $y = \frac{1}{6}$ và $x = \frac{5}{6}$.

Khi $m = 2$, phương trình vô nghiệm và hệ cũng vô nghiệm.

b) Nếu $m^2 - m - 2 \neq 0$, tức $m \neq -1$ và $m \neq 2$.

Khi đó $\Delta' = 3(2 - m)$. Khi $m > 2$, thì $\Delta' < 0$ phương trình vô nghiệm và hệ cũng vô nghiệm. Khi $m < 2$, thì (1) có 2 nghiệm :

$$\mathbf{x}_{1,2} = \mathbf{m}\mathbf{y}_{1,2} + 1 \quad (2)$$

Khi $m = -1$, hệ có nghiệm $x = \frac{5}{6}$; $y = \frac{1}{6}$.

IV. 1) Trong mặt phẳng (ABJ) hạ $BH \perp AJ$. Vì mặt phẳng (AIJ) $\perp d'$ (vì $d' \perp d$ và IJ), nên BH cũng vuông góc với d' , và $BH \perp AJ$. Do đó $BH \perp P$. Vì $NH \perp AM$ và $AJ \perp d'$ (vì $d' \perp (AIJ)$), nên H là trực tâm của $\triangle AMN$. Từ đó $MH \perp AN$. Mặt khác theo chứng minh trên $BH \perp P$, nên $BH \perp AN$. Do đó $AN \perp (BHM)$, từ đó $AN \perp BM$. Vì $AM \perp NH$, $AM \perp BH$, nên $AM \perp (BHN)$. Do đó $AM \perp BN$.

3) Xét $\triangle NHJ$ và $\triangle MAJ$, có $\widehat{HNJ} = \widehat{JAM}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{AMJ}$), nên chúng đồng dạng. Từ đó suy ra $\frac{HJ}{NJ} = \frac{MJ}{AJ}$, hay $JM \cdot JN = JH \cdot JA$ (không đổi) (hình 207).

V. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 9 = 0, \\ -x + 2y + 7 = 0, \end{cases}$$

ta được $x = 3$; $y = -2$.

Rõ ràng là cặp số $x = 3, y = -2$ làm cho vế trái triệt tiêu. Còn vế phải luôn luôn bằng 1. Điều đó mâu thuẫn. Vậy không tồn tại các hằng số A, B, m, n để hệ thức đã cho được thỏa mãn với mọi x, y.

Đề số 6

I. a) Đạo hàm y' luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Phương trình đường thẳng đó là :

$$y = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}(m + 1)$$

c) $m = 0$.

$$\text{II. } x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ và } x = \frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}.$$

III. Đưa về việc giải bất phương trình $\frac{t^2 - 2t}{2 + t} > 0$ với

$$t = \log_a \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right)$$

$$\text{IV. a) } OC = a\sqrt{2} ; OD = 2a\sqrt{2} ; V = a^3 \cdot \sqrt{6} ;$$

$$S_{tp} = 3a^2(1 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2}).$$

b) Chú ý rằng $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ là hai tam giác vuông bằng nhau (vuông tại A và B). Từ đó suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD là điểm giữa K của đoạn CD. K chính là giao điểm của hai đường thẳng nối trong đầu bài.

V. Với mọi a, b, c ta luôn có :

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1. \text{ Mặt khác}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \leq \\ \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) = 3.$$

Vậy : $a + b + c + ab + bc + ca \leq 1 + \sqrt{3}$.

Đề số 7

I. Với $a \geq 0$ phương trình có nghiệm

$$x = \frac{2(a-1) + \sqrt{8a+4}}{4}.$$

II. a) Bạn đọc tự giải.

b) $m \leq -2 - 3\sqrt{2}$ hoặc $m \geq -1 + 2\sqrt{2}$.

III. a) $\log_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{2} \right) < x < 0$.

b) $x \geq 3$ hoặc $0 < x < \sqrt{2} - 1$.

IV. a) Các mặt phẳng cùng đi qua SH.

b) Hãy chứng minh $A'B' \parallel AB$; $B'C' \parallel BC$; $C'A' \parallel CA$.

c) Khi $A' \equiv A$; $B' \equiv B$; $C' \equiv C$ thì SABC có các góc phẳng ở S vuông. Từ đó dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

V. Tổng $x + y$ nhỏ nhất bằng $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$, đạt được khi

$$\begin{cases} x = a + \sqrt{ab}, \\ y = b + \sqrt{ab}. \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN CHUNG

Đối với môn toán ở khối A cũng như khối B nội dung đề thi không có câu hỏi lý thuyết mà chỉ có bài tập.

Những vấn đề nêu trong bản hướng dẫn này dựa trên cơ sở các kiến thức cơ bản trong chương trình phổ thông mà nội dung của nó rất cần thiết để tiếp tục học tập ở bậc đại học.

Đặc điểm của môn toán ở lớp 10 (hệ phổ thông 10 năm) cũng như lớp 12 (hệ phổ thông 12 năm) có thể nói là hệ quả trực tiếp của nội dung phương pháp tư duy và kĩ năng tính toán của toàn bộ kiến thức về toán ở bậc phổ thông, do đó bản hướng dẫn ôn thi môn toán được sắp xếp gọn và theo từng vấn đề lớn trong các lĩnh vực đại số, hình học và lượng giác để học sinh chuẩn bị có trọng tâm và nắm vững chắc.

HƯỚNG DẪN CỤ THỂ

HỆ PHỔ THÔNG 10 NĂM

1. Đại số

a) Phương trình và hệ phương trình

* Phương trình bậc nhất với một ẩn số, hệ hai phương trình với hai ẩn số.

* Phương trình bậc hai, hệ hai phương trình bậc hai với hai ẩn số (lớp 8).

* Phương trình mũ và lôgarit, hệ phương trình mũ và lôgarit (lớp 9).

b) Bất đẳng thức, bất phương trình, hệ bất phương trình

* Bất đẳng thức, các tính chất cơ bản và ứng dụng.

* Dấu của nhị thức bậc nhất, tam thức bậc hai, định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai.

* Bất phương trình bậc nhất, bậc hai và các bất phương trình đưa về các bất phương trình trên. Hệ bất phương trình với một ẩn số.

* Phương trình, hệ phương trình và bất phương trình chứa căn thức, chứa trị số tuyệt đối (chú ý đến việc đặt điều kiện và biện luận).

* Bất phương trình mũ và lôgarit.

c) Hàm số, đạo hàm, khảo sát hàm số

* Đạo hàm : định nghĩa, phép tính đạo hàm của tổng, tích, thương, hàm số dưới dấu căn thức, hàm số của hàm số, hàm lượng giác.

* Liên hệ đạo hàm của hàm số với tính đồng biến, nghịch biến của nó. Các quy tắc tìm cực đại, cực tiểu của một hàm số. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của một hàm số.

* Khảo sát và vẽ đồ thị của một hàm số : miền xác định, khoảng đồng biến, nghịch biến, tiệm cận, cực đại, cực tiểu, bảng biến thiên, vẽ đồ thị. Chú ý khảo sát và biện luận các loại hàm : bậc nhất, bậc hai, bậc ba, bậc bốn, hàm phân thức dạng $\frac{ax + b}{cx + d}$, $\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ có chứa tham số. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị.

* Ứng dụng việc khảo sát cực đại, cực tiểu, giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số vào phép chứng minh bất đẳng thức và xét nghiệm của một phương trình.

2. Lượng giác

a) Công thức lượng giác (lớp 9)

Hàm số lượng giác của tổng và hiệu hai cung, hàm số lượng giác của góc nhân đôi, nhân ba, chia đôi, biến đổi tích thành tổng, tổng thành tích.

b) Phương trình lượng giác

* Các phương trình cơ bản $\sin x = \sin a$; $\cos x = \cos a$, v.v...

* Phương trình đưa về bậc nhất : $a \sin x + b \cos x = c$ và các phương trình đưa về bậc nhất.

* Vài loại phương trình đơn giản khác (chú ý đến việc sử dụng ẩn số phụ và phép thay ẩn số).

c) Áp dụng vào hình học.

* Định lý hàm số sin, hàm số cosin.

* Sử dụng các hàm số lượng giác để biểu diễn mối liên hệ giữa các yếu tố của một tam giác.

* Phép giải tam giác vuông và tam giác thường (chú ý đến các trường hợp cơ bản).

* Áp dụng vào hình học không gian : diện tích của hình chiếu, xác định góc nhị diện, góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng, góc giữa hai đường thẳng.

3. Hình học

Nội dung bao gồm toàn bộ phần chương trình lớp 10.

Tuy nhiên để có thể giải quyết tốt nội dung phần chương trình lớp 10, học sinh nhất thiết phải ôn lại phần Hình học không gian, học kỳ 2 lớp 9.

Tuy rằng đề thi sẽ hỏi về hình học không gian, nhưng để làm được các bài toán hình học không gian, học sinh cần phải vận dụng được các kiến thức cơ bản của hình học phẳng : góc nội tiếp trong một hình tròn (lớp 7), tam giác đồng dạng, các hệ thức cơ bản trong tam giác (lớp 8), các quỹ tích cơ bản.

a) Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian (lớp 9).

* Đường thẳng và mặt phẳng song song, vuông góc. Định lý thuận và đảo về ba đường vuông góc.

* Góc nhị diện. Phép chiếu vuông góc xác định góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng, góc giữa hai đường thẳng, góc tam diện.

b) Khối đa diện.

* Hình lăng trụ, hình hộp đứng và xiên, tính thể tích và diện tích xung quanh.

* Tứ diện, tứ diện đều, hình chóp đa giác, hình chóp đa giác đều : tính thể tích và diện tích xung quanh, góc phẳng ở đỉnh, góc giữa hai mặt, góc giữa một cạnh và một mặt.

* Thiết diện của một mặt phẳng với một khối đa diện : xác định thiết diện, tính diện tích của thiết diện.

c) Khối tròn

* Hình trụ, hình trụ tròn xoay, hình nón, hình nón tròn xoay. Tính thể tích và diện tích xung quanh.

* Hình cầu. Hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của một tứ diện, của một hình nón. Hình trụ, hình nón ngoại tiếp một hình cầu.

* Bề mặt diện tích gây nên bởi một đoạn thẳng quay quanh một trục. Diện tích của mặt cầu. Thể tích của hình cầu. Diện tích xung quanh và thể tích của một đới cầu.

MỤC LỤC

PHẦN THỨ NHẤT

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Chương I. Phương trình, bất phương trình và hệ phương trình

§1. Phương trình, bất phương trình bậc nhất một ẩn	8
§2. Hệ phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất	13
§3. Phương trình và bất phương trình bậc cao	26
§4. Hệ phương trình bậc cao	36

Chương II. Phương trình, bất phương trình và hệ chứa dấu giá trị tuyệt đối

§1. Các phương pháp giải các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối	64
§2. Các ví dụ	65

Chương III. Phương trình, bất phương trình và hệ chứa căn thức

§1. Phương trình và bất phương trình vô tỉ	89
§2. Hệ phương trình và hệ bất phương trình chứa căn	113

Chương IV. Phương trình, bất phương trình và hệ siêu việt

§1. Phương trình và bất phương trình chứa hàm số mũ	131
§2. Phương trình và bất phương trình chứa hàm số lôgarit	146
§3. Hệ phương trình và hệ bất phương trình siêu việt	154
	455

PHẦN THỨ HAI
HÌNH HỌC

Chương I. Một số bài toán cơ bản

§1. Giao tuyến và giao điểm	162
§2. Quan hệ song song	166
§3. Tam giác vuông	168
§4. Thể tích hình chóp	173

Chương II. Thiết diện của khối đa diện

§1. Dựng thiết diện	186
§2. Diện tích mặt cắt	194
§3. Tỷ số thể tích	203

Chương III. Quỹ tích

A - Quỹ tích trong mặt phẳng

§1. Giải bài toán quỹ tích	219
§2. Giới hạn của quỹ tích	227
§3. Tìm quỹ tích bằng phương pháp vị tự	233

B - Quỹ tích trong không gian

§4. Các quỹ tích cơ bản	238
§5. Quỹ tích phẳng trong không gian	245

Chương IV. Bài toán cực trị

§1. Góc, khoảng cách và đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau	262
§2. Hệ thức liên hệ	277

**Chương V. Phương pháp xác định tâm
và bán kính hình cầu nội tiếp
và ngoại tiếp khối đa diện**

§1. Khái niệm chung	312
§2. Tìm tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp và tứ diện	316
§3. Phương pháp tìm tâm hình cầu ngoại tiếp hình lăng trụ và hình chóp cụt	321
§4. Phương pháp tìm tâm hình cầu nội tiếp trong hình chóp hoặc tứ diện	324

Chương VI. Tổ hợp hình chóp, nón, cầu

§1. Mặt nón, hình nón	338
§2. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp hình cầu	344
§3. Hình nón nội tiếp, ngoại tiếp một hình chóp	350

**Chương VII. Phép chiếu vuông góc trong
không gian và ứng dụng của nó**

§1. Các định nghĩa và tính chất	359
§2. Các bài toán hình học có liên quan đến phép chiếu	361
§3. Dùng phép chiếu vuông góc để giải một số bài toán hình không gian	363

Chương VIII. Phương pháp thể tích

§1. Chứng minh các hệ thức trong các hình	370
§2. Tính các yếu tố khác trong đa diện, tính tỷ số thể tích	373
§3. Giải các bài toán quỹ tích và cực trị	378

**Chương IV. Một số bài toán hình học
có nhiều cách giải**

PHẦN THỨ BA

Một số đề toán tự luyện	416
Hướng dẫn chung	450

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập: NGUYỄN THIÊN GIÁP

Biên tập và sửa bản in: MẠNH QUANG

HỒNG LIÊN

Trình bày bìa:

NGUYỄN MẠNH DỨA